НОРМАЛЬНЫЕ РУКОВОДСТВА ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФЕССОРОВ:
Н. М. ГЮНТЕРА, Я. Д. ТАМАРКИНА,
Я. В. УСПЕНСКОГО и А. А. ФРИДМАНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД
1924

Государственная типография имени Ивана Федорова,
Звенигородская, 11.

Гиз. 6120. Отпеч. 5000 экз. Ленинградский Гублит № 4557.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Трудности, связанные с изданием Сборника задач в том виде, в котором он выдержал два издания, побудили составителей согласиться на предложение Государственного Издательства издать его в сокращенном виде; составители, однако, надеются, что через некоторое время полное издание Сборника станет возможным и что это сокращенное издание будет единственным.

При сокращении Сборника с 4426 задач до 2892 сокращению подверглись, главным образом, задачи, превышающие силу среднего студента; но сокращена и часть задач, не принадлежащих к этой категории, но являющихся повторением других, оставленных в Сборнике. Сокращение коснулось всех отделов; главным образом, однако, последних.

Из материала, имевшегося в распоряжении составителей и предназначенного для пополнения 3-го издания, некоторые задачи вошли в это издание. Так что, несмотря на сокращение, Сборник пополнился несколькими задачами, необходимость которых обнаружилась при приложении 2-го издания к делу.

В виду сокращения числа задач, составители сочли более удобным слить некоторые отделы. Так слиты отделы I и II, III и IV, VII и VIII 2-го издания. Часть задач отдела XII старого издания присоединена к бывшему VI, ныне IV, отделу.

Отделы I и III редактировал проф. А. А. Фридман.

Отдел II редактировал проф. Н. М. Гюнтер.

Отделы IV и V редактировал акад. Я. В. Успенский.

Отделы VI, VII, VIII и IX редактировал проф. Я. Д. Тамаркин.

Составители

ОТДЕЛ I

Аналитическая геометрия [1]).

Задачи на применение первоначальных формул.

1. Найти расстояние между точками M_1 (1,2), M_2 (2,1). $\theta=120^\circ$.

2. Расстояние между точками A (2,1) и B (1,2) равно 1. Найти угол между осями координат.

3. Точка $C(2,1)$ делит отрезок AB, где $A(7,4)$, пополам. Найти точку B.

4. Разделить отрезок AB, соединяющий точки A (5,4) и B $(6,-9)$, в отношении 1 : 3.

5. На прямой, проходящей через точки A (5,4) и B $(6,-9)$, найти точки C такие, что $\frac{\text{дл. } AC}{\text{дл. } CB}={}^7/_4$.

6. Отрезок AB точками M_1 (1,2) и M_2 (3,4) разделен на три равные части. Найти точки A и B.

7. Координаты середин сторон треугольника суть: M_1 $(-2,1)$, M_2 (2,3) и M_3 $(4,-1)$. Найти координаты вершин.

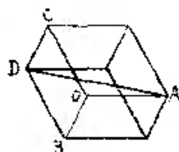
8. Точки M_1 (1,1), M_2 (2,2), M_3 $(3,-1)$ суть три последовательные вершины параллелограмма. Найти четвертую вершину.

9. Зная, что точки M_1 (2,1) и M_2 $(-3,4)$ две смежные вершины параллелограмма, а N $(-1,0)$ точка пересечения его диагоналей, найти две другие вершины.

10. Вычислить диагонали правильного шестиугольника, рассматривая их как замыкающие.

11. Пользуясь теорией проекций, вычислить угол между противолежащими ребрами правильного тетраэдра.

12. В параллелепипеде даны углы: $AOB=60^\circ$, $AOC=120^\circ$ и $BOC=120^\circ$. Определить длину диагонали AD и угол ее со стороной OC. Длина сторон параллелепипеда $=1$ (черт. 1).



Черт. 1.

13. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2).

14. Найти ур-ние окружности, центр которой в точке M (1,1), а радиус 2. Угол между осями $\theta=60^\circ$.

15. Написать уравнение окружности, лежащей во втором угле прямоугольной системы и касающейся осей координат, если радиус $r=1$.

---

[1]) В задачах, где нет указаний на угол между осями координат он считается прямым.

16. Найти уравнение окружности, проходящей через точки A (1,0), B $(-1, -1)$, C (0,1).

17. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку A (1,2).

18. Проверив, что кривая $x^2+y^2-2x-4y=0$ окружность, найти ее центр и радиус.

19. Найти уравнение такой линии, любая точка M которой удовлетворяет условию: $\frac{\text{дл. } MM_1}{\text{дл. } MM_2}=\frac{1}{2}$, при чем M_1 (1,0) и M_2 (0,1). Доказать, что эта линия окружность.

20. Найти г. м. середин отрезков, соединяющих точки на окружности: $(x-1)^2+y^2=4$ с началом координат. Доказать, что это окружность.

21. Найти г. м. точек, равноудаленных от точки $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и от прямой DD', проходящей через точку $D\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ и параллельной оси OY.

22. Найти ур-ние г. м. точек, отношения расстояний которых от точки $(ea,0)$ и от прямой DD', проходящей через точку $D\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ и параллельной оси OY, равны e.

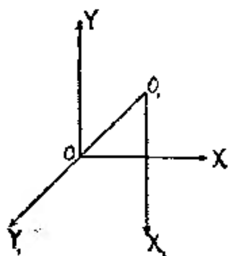
23. Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через точку A $(a,0)$ и видных из точки B $(b,0)$ под углом 2α.

24. Найти уравнение круга, для которого точки A (1,3) и B (3,—5) являются концами одного из диаметров.

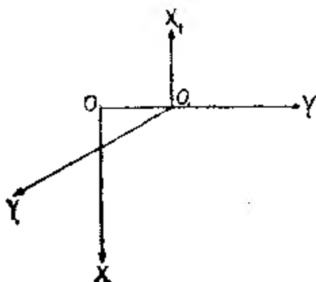
25. В двух системах координат с параллельными и одинаково направленными осями координаты некоторой точки суть (2,4) и (— 3,0). Найти координаты начала одной системы относительно другой.

26. Составить формулы для перехода от системы координат XOY к системе $X_1O_1Y_1$, где система XOY прямоугольная, O_1 (1,1) и ось O_1X_1 перпендикулярна к оси OX (черт. 2).

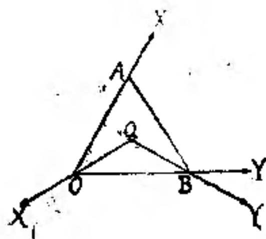
27. Составить формулы перехода от системы XOY к системе $X_1O_1Y_1$, если оси OY и O_1X_1 перпендикулярны, а угол между осями OX и O_1Y_1 равен 60°; длина $OO_1=2$ (черт. 3).



Черт. 2.



Черт. 3.



Черт. 4.

28. OAB равносторонний $\triangle$-к, центр которого в O_1 и длина стороны a. Составить формулы для перехода от осей XOY к осям $X_1O_1Y_1$ и обратно (черт. 4).

29. Дана линия $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в прямоугольных осях. Найти ее уравнение в новых осях, приняв за таковые диагонали прямоугольника, уравнения сторон которого суть: $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$.

30. Та же задача для линии $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

31. Уравнение линии, отнесенной к косоугольной системе координат с углом $\theta=45°$, есть $xy\sqrt{2}=1-y^2$. Каково будет уравнение этой линии в прямоугольной системе, если новое начало и новая ось абсцисс совпадают с прежними?

32. Преобразовать ур-ние $x^2-y^2=2a(x-y+a)$, взяв за новое начало координат точку $M(a, a)$, а за новые оси прямые, || биссекторам углов между координатными осями.

33. Дано уравнение линии $x^2+xy+y^2-2x-2y=0$. Найти новое уравнение этой линии, если начало координат перенесено в точку (1,1), новые оси параллельны прежним, но направлены в обратную сторону.

34. Найти новое уравнение линии $x^2+y^2-xy-hx-hy=0$, $\theta=120°$, отнеся ее к прямоугольной системе, начало и ось абсцисс которой совпадают с прежними. Определить вид линии.

Прямая линия.

35. Для прямой OX чертежа 4-го (к зад. № 28) в системе координат $X_1O_1Y_1$ найти ее уравнение:

a) в нормальном виде, b) с угловым коэффициентом, c) в отрезках на осях. Каждый случай решать отдельно.

36. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых: a) $x+y+1=0$, b) $x+1=0$. $\theta=60°$.

37. Провести прямую через точки $M_1(-1,2)$, $M_2(2,1)$.

38. Провести прямую через точки $M_1(2,1)$, $M_2(5,1)$.

39. Найти ур-ния сторон $\triangle$-ка, вершины которого $M_1(1,-1)$, $M_2(3,5)$ и $M_3(-7,11)$.

40. Найти расстояние прямой $4x+4y-1=0$ от начала координат и углы, образованные перпендикуляром к этой прямой из начала с координатными осями. $\theta=120°$.

41. Написать ур-ние прямой, проходящей через точку $M(2,1)$ и образующей с осью OX угол в 45°. $\theta=60°$.

42. Через точку $(2,-1)$ провести прямую, параллельно прямой $2x+3y=0$.

43. Через точку $(0,-1)$ провести прямую, перпендикулярно прямой $x-2y=0$. $\theta=120°$.

44. Через точку $M(3,5)$ провести прямые под углом в 45° к прямой $3x-2y+7=0$.

45. Найти углы $\triangle$-ка $M_1(0,1)$, $M_2(1,1)$, $M_3(1,0)$.

40. Найти вершины треугольника, уравнения сторон которого $x-y=0$, $2x+3y-5=0$, $x+2y+3=0$.

47. Найти площвдь $\triangle$-ка, вершины которого $M_1(2,1)$, $M_2(-1,2)$, $M_3(-2,1)$.

48. Найти площадь $\triangle$-ка, стороны которого $y-3x+9=0$, $2x+y-1=0$, $x+y-1=0$.

49. Найти расстояние между параллельными прямыми $x+2y-1=0$, $x+2y-4=0$. $\theta=60°$.

50. Написать уравнение прямой, лежащей посредине между двумя данными параллельными прямыми $3x+2y=5$, $6x+4y+3=0$.

51. Через точку M (3,4) провести прямую так, чтобы площадь $\triangle$-ка, стороны которого координатные оси и искомая прямая, равнялась 9 кв. ед.

52. Найти ур-ние прямой, проходящей через точку M (—4,3) и удаленной от начала координат на расстояние, равное 5 ед. дл.

53. Через точку (—1,2) провести прямую, расстояние которой от точки (3, —1) равно 2 ед. дл.

54. Через точку M (1,2) провести прямую, расстояния до которой точек M_1 (2,3) и M_2 (4, —5) были бы одинаковы.

55. Дана прямая $2x+y-3=0$ и точка M (1,1) на ней. Найти на данной прямой точку N такую, чтобы дл. $MN=\sqrt{5}$.

56. Даны две противоположные вершины квадрата M_1 (2,1) и M_3 (4,5). Найти две другие вершины.

57. Даны две смежные вершины квадрата M_1 (1,4) и M_2 (4,5). Найти две другие вершины.

58. Дана прямая $4x+3y+1=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной, так, чтобы расстояние между прямыми было равно 3 ед.

59. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $2x+3y+6=0$, если известно, что она отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого $=3$ кв. ед.

60. В параллелограмме $ABCD$ даны уравнения сторон AB ($3x+4y-12=0$) и AD ($5x-12y-6=0$) и точка $E\left(-2, \frac{13}{6}\right)$—середина стороны BC. Найти уравнения других сторон параллелограмма.

61. Найти прямую, параллельную прямым $x+2y-1=0$, $x+2y-3=0$, расположенную между ними и делящую расстояние между ними соответственно в отношении 1 : 3.

62. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$ и точка пересечения его диагоналей N (1,2). Найти уравнения двух других сторон этого параллелограмма.

63. Даны две точки M_1 (2,3) и M_2 (12,5). Найти на оси абсцисс точку P такую, чтобы угол M_1PM_2 был прямой.

64. Из точки M (2,1) опустить перпендикуляры на прямые: *a*) $x+y-1=0$, $\theta=90°$, *b*) $x+2y-1=0$, $\theta=60°$, *c*) $x=0$, $\theta=60°$.

65. Даны две точки M_1 (1,3) и M_2 (—1, —5). На прямой $2x+3y+1=0$ найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек. $\theta=60°$.

66. Найти уравнение круга, описанного около треугольника, вершины которого суть A (0,3), B (1,1) и C (4,1).

67. Найти уравнение круга, описанного около треугольника, вершины которого суть: M_1 (1,3), M_2 (—2,1) и M_3 (—1, —3).

68. На окружности $x^2+y^2=1$ найти точку, одинаково удаленную от точек M_1 (1,3) и M_2 (—2,2).

69. Найти координаты точки, равноудаленной от точек M_1 (4, —3) и M_2 (2, —1) и отстоящей от прямой $2x+y=1$ на расстоянии, равном 2 ед.

70. Даны уравнения высот треугольника $2x-3y+1=0$, $x+y=0$ и координаты одной из его вершин M_1 (1,2). Найти уравнения сторон треугольника.

71. Даны две вершины треугольника M_1 (2,1) и M_2 (4,9) и точка пересечения его высот N (3,4). Найти уравнения сторон треугольника.

72. Даны координаты середин сторон треугольника M_1 (1,2), M_2 (7,4) M_3 (3, — 4). Найти уравнения сторон.

73. Даны уравнения сторон треугольника $x+y-1=0$ и $y+1=0$ и точка (—1,0) пересечения медиан. Найти уравнение третьей стороны.

74. Через точку M (1,1) провести прямую так, чтобы угол между прямою $x=y$ и ею, отсчитанный против часовой стрелки от прямой $x=y$, был равен 60°.

75. Через точку (5,1) провести прямую, составляющую с прямой $5x+6y-1=0$ угол в 60°.

76. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (1,2) и составляющей угол $\varphi=45°$ с прямой $y=x+5$.

77. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M (2, — 1) и составляющей с осью OX угол вдвое больший, чем угол прямой $3y-x=4$ с той же осью.

78. Найти уравнения перпендикуляров, опущенных из вершин треугольника ABC, где A (1,3), B (— 1,0) и $C\left(1, -\frac{4}{3}\right)$, на его стороны и убедиться, что они пересекаются в одной точке.

79. Через точку пересечения прямых $x-y-1=0$, $x+2y-2=0$ и точку M (— 1,1) провести прямую, не находя координат точки пересечения.

80. Через точку пересечения прямых $x+2y+1=0$ и $x-y+1=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $y=2x$. $\theta=60°$.

81. Найти прямую, которая проходит через точку пересечения прямых $x+y-1=0$, $x+2y+1=0$ и отсекает на отрицательной части оси OY отрезок, длина которого 2 ед. дл.

82. Через точку пересечения прямых $x+2y-1=0$, $x-y+1=0$ провести прямые: *a*) через точку (0,1), *b*) $\parallel$ - но прямой $x-y-10=0$, *c*) $\perp$ - но прямой $x+y-1=0$.

83. Через точку пересечения прямых $y=2x+5$ и $x=2$ провести прямую, перпендикулярную к оси OY (не находя координат точки пересечения). $\theta=120°$.

84. Через точку пересечения прямых $x+2y-11=0$, $2x-y-2=0$ провести прямую, расстояние которой от начала координат равно 5.

85. Через точку пересечения прямых $2x+5y+8=0$, $3x-4y-7=0$ провести прямую, угол между которой и прямой $y=4x+3$ равен 45°.

86. Через точку M (—1,1) провести прямую так, чтобы середина отрезка ее между параллельными прямыми $x+2y-1=0$, $x+2y-3=0$ лежала на прямой $x-y-1=0$.

87. Через начало координат провести прямые так, чтобы отрезки их между $\parallel$-ыми прямыми $x-y+1=0$, $x-y-2=0$ равнялись 3 един. дл.

88. Через точку (1,2) провести касательную к окружности $x^2+y^2=5$.

89. Через точку (—1,3) провести касательные к окружности $x^2+y^2=5$.

90. Найти уравнения общих касательных к окружностям $x^2+y^2=\frac{1}{9}$ и $x^2+y^2-6x=0$.

91. Найти биссекторы углов между прямыми $3x+4y-1=0$, $4x-3y+5=0$.

92. Найти ур—ние биссектора того угла между прямыми $12x-35y=23$, $11x+60y=-71$, в котором находится начало координат.

93. Найти биссектор того угла между прямыми $x+2y-5=0$, $2x-y+4=0$, в котором лежит точка M (1,1).

94. Найти ур—ния внутренних биссекторов $\triangle$-ка, вершины которого M_1 (1,2), M_2 (—1, —1), M_3 (2,1).

95. Найти ур-ния внешних биссекторов $\triangle$-ка M_1 (1,2), M_2 (—1, —1), M_3 (2,1).

96. Найти уравнение круга, вписанного в треугольник, заданный уравнениями его сторон: AB $(3x-4y=25)$, BC $(5x+12y=65)$ и CA $(8x+15y+$ $+85=0)$.

97. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $2x-y+8=0$, $x=4y+12$ и точка на его основании (4,0). Найти уравнение основания.



Черт. 5.

98. Найти отражение точки M (2,1) в прямой $x+2y-1=0$, $\theta=60^\circ$.

Примечание. Если $MN \perp$ к BC и A середина MN, то N отражение M (черт. 5).

99. Найти отражение точки M (2,1) в оси OY. $\theta=60^\circ$.

100. Луч света, проходящий через точку (2,3), отражается от прямой $x+y+1=0$ и проходит после этого через точку (1,1). Найти уравнения лучей падающего и отраженного.

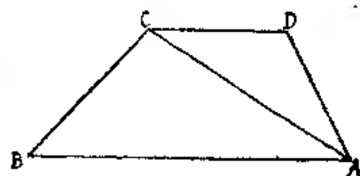
101. Луч света, проходящий через точку M (1,2), отражается от прямой $x+5y+1=0$ и снова проходит через точку N (—1,3). Найти уравнения лучей падающего и отраженного.

102. Прямая $2x+y-1=0$ внутренний биссектор треугольника, две вершины которого суть точки M_1 (1,2) и M_2 (—1, —1). Найти уравнения сторон треугольника.

103. Даны координаты вершины треугольника (2,5) и уравнения внутренних биссекторов углов его $3x+4y-12=0$ и $x-y-1=0$. Найти уравнения сторон треугольника.

104. Даны две вершины треугольника A (1,1) и B (5,4), уравнение биссектора внутреннего угла $2x-y-1=0$ и площадь треугольника $=5$ кв. ед. Найти уравнения сторон.

105. В трапеции $ABCD$ даны координаты вершин $A\left(3, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{18}{5}, -2\right)$ и D (0,3). Кроме того известно, что диагональ AC делит угол BAD пополам. Найти вершину C (Черт. 6).



Черт. 6.

106. На прямой $x+2y-1=0$ найти точку, из которой данная окружность $x^2+y^2-2x+4y=0$ видна под углом в 60°.

107. Даны ур-ния основания равнобедренн. треугольн. $x+y-1=0$ и боковой его стороны $x-2y-2=0$; точка

(—2,0) лежит на другой боковой стороне. Найти уравнение третьей стороны треугольника.

108. Доказать, что сумма расстояний всякой точки внутри равностороннего треугольника до сторон постоянна.

109. Во всяком треугольнике точки пересечения высот, медиан и центр описанного круга лежат на одной прямой.

110. Взять прямые $2x-y+1=0$, $x+2y-1=0$ соответственно за новые оси O_1X_1 и O_1Y_1, приписав им такие направления, чтобы новые координаты старого начала были положительны. Составить формулы для перехода.

111. Взять прямые $2x-y+1=0$, $x+2y-1=0$ ($\theta=60^\circ$) соответственно за новые оси O_1X_1 и O_1Y_1, приписав им такие направления, чтобы новые координаты точки M (1,4) были положительны. Составить формулы для перехода.

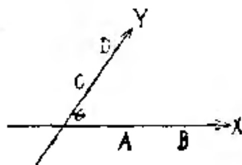
112. Прямые $x-y-1=0$ и $x+y+2=0$, заданные в системе прямоугольных осей, взять за новые координатные оси O_1X_1 и O_1Y_1 соответственно и выбрать так направления новых осей, чтобы новые координаты старого начала были отрицательны. Найти уравнения старых осей в новой системе координат.

113. Биссекторы углов между прямыми $7x+23y=7$ (1), $x=y+1$ (2) приняты за координатные оси; при этом новая ось O_1X_1 — биссектор того угла между прямыми (1) и (2), где лежит начало старых координат, новые координаты которого положительны. Найти *новое уравнение* прямой (2), после чего сразу написать уравнение прямой (1).

Геометрические места.

114. Даны две пары точек A_1, B_1 и A_2, B_2. Найти геометрическое место таких точек M, что отношение площадей треугольников MA_1B_1 и MA_2B_2 имеет постоянное значение.

115. Найти г. м. общих вершин двух △-ов, основаниями которых служат отрезки AB и CD на координатных осях и сумма площадей которых S дл. $AB=a$, дл. $CD=b$ (черт. 7).

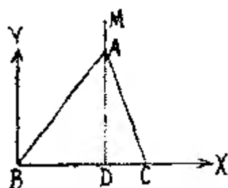


Черт. 7.

116. Найти геометрическое место точки пересечения перпендикуляров к сторонам данного угла, если середина расстояния между основаниями этих перпендикуляров находится на данной прямой.

117. Дан треугольник AOB; по двум его сторонам OA и OB перемещаются точки P и Q так, что $AP=BQ$. Найти геометрическое место середины отрезка PQ.

118. Дано основание $BC=a$ треугольника и сумма s его боковых сторон. На перпендикуляре, опущенном из вершины A на основание BC, откладываем отрезок DM, равный стороне BA. Найти геометрическое место точки M (черт. 8).



Черт. 8.

119. Найти геометрическое место точки пересечения медиан треугольника, если дано его основание, а противоположная вершина находится на прямой $y = mx + n$.

120. Найти геометрическое место точки пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что одна из сторон последних совпадает с основанием треугольника.

121. Дано основание треугольника, противоположная ему вершина движется по данной прямой. Найти геометрическое место точки пересечения высот треугольника.

122. Прямая вращается около точки M (1, 2), пересекая оси координат в точках A и B. Найти геометрическое место точки пересечения перпендикуляров, восставленных к осям координат в точках A и B. $\theta = 120°$.

123. Дан угол φ при вершине треугольника. Найти геометр. место точки M, в которой основание треугольника делится в данном отношении $m : n$ в то время, как площадь треугольника остается постоянно равной C. За координатный угол взять угол φ.

124. Дано основание $2a$ треугольника и известно, что один из углов при основании вдвое более другого. Найти геометрическое место вершины, взяв за ось OX основание треугольника, а за ось OY перпендикуляр, восставленный из середины основания.

125. Найти геометр. место точки пересечения прямых, параллельных осям координат и проходящих через точки M и N на координатных осях, при чем линия MN вращается вокруг неподвижной точки P (x_0, y_0).

126. Дано основание $2a$ и разность φ углов при основании треугольника. Найти геометрическое место вершины, взяв за ось OX основание треугольника, а за ось OY перпендикуляр, восставленный из середины основания.

127. Дан треугольник ABC (черт. 9). Прямая, параллельная основанию AC, пересекает стороны треугольника в точках P и Q. Эти точки соединяются прямыми PR и QS с двумя неподвижными точками R и S основания. Найти геометрическое место пересечения этих прямых.

Черт 9

Черт 10.

128. Найти геометрическое место середин отрезков, отсекаемых прямыми $x + 2y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ от прямых, параллельных прямой $2x + y = 0$.

129. Дана прямая AB и вне ее точки C и D. Переменная точка E прямой AB соединена с точками C и D, и из последних восставлены до взаимной встречи перпендикуляры GC и GD. Найти геометрическое место точки G (черт. 10).

130. Составить уравн. г. м. вершин $\triangle$-ов, основание которых расположено на оси X-ов, равно $2a$ и делится началом координат пополам, а сумма квадратов медиан двух боковых сторон равна k^2.

131. Найти уравн. г. м. центров тяжести $\triangle$-ов, стороны которых лежат на прямых: $x = 0$; $y = 0$; $\frac{x}{k} + \frac{y}{3-k} = 1$, при чем $0 < k < 3$.

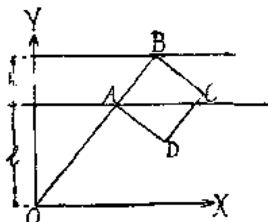
132. Прямоугольный треугольник ABC неизменной величины скользит вершинами острых углов B и C по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найти геометрическое место вершины прямого угла.

133. Три вершины параллелограмма, стороны которого остаются параллельными данным направлениям, скользят по трем данным прямым. Найти геометрическое место четвертой вершины.

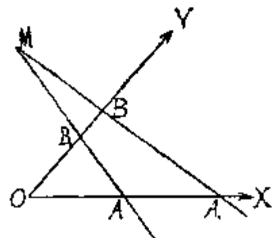
134. Сторона AB квадрата $ABCD$ проходит через данную точку O, вершины A и B скользят по двум данным параллельным прямым. Найти геометрическое место вершин C и D (черт. 11).

135. Найти геометрическое место точек, из которых два отрезка AB и CD одной прямой видны под равными (или дополнительными) углами.

136. Найти уравн. г. м. центров тяжести прямоугольных $\triangle$-ов, которых катеты расположены по положительным направлениям координатных осей, а периметр равен $2p$.



Черт 11

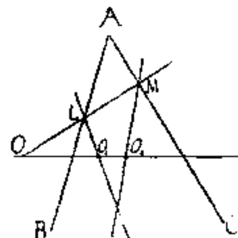


Черт. 12

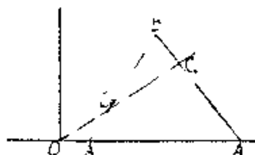
137. На осях координат даны неподвижные точки A и B и переменные A_1 и B_1, так, что $OA + OB = OA_1 + OB_1$. Найти геометрическое место точки пересечения прямых AB_1 и A_1B (черт. 12).

138. Найти геометрическое место середин хорд круга $x^2 + y^2 = r^2$, проходящих через данную внутри круга точку P $(c, 0)$.

139. Даны на прямой OX три точки O, O_1 и O_2 и угол BAC. Проведя через O произвольную прямую, пересекающую стороны угла BAC в точках L и M, а также прямые через точки L и O_1, M и O_2, получим переменный треугольник LMN. Найти геометрическое место вершины N (черт. 13).



Черт. 13



Черт. 14

140. Дан треугольник ABA_1. Через неподвижную точку O на стороне AA_1 проводится подвижная секущая OCC_1 и затем круги через точки O, A, C и через точки O, A_1, C_1. Найти геометрическое место точки пересечения этих кругов (черт. 14, $OA = a$, $OA_1 = a_1$).

141. Прямой угол CAB вращается около вершины A. Стороны его пересекают стороны неподвижного прямого угла с вершиной в O в точках B и C. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из O на прямую CB.

142. Если квадрат неизменной величины перемещается так, что две смежные стороны AB и AD проходят через данные точки, то диагональ AC проходит через постоянную точку.

143. Даны две параллельные прямые и точка P между ними. Переменная прямая перемещается так, что отрезок ее AB между параллельными виден из точки P под прямым углом. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из P на AB.

144. Даны точка и прямая. Угол постоянной величины вращается около вершины, находящейся в данной точке. Найти геометрическое место центра круга, описанного около треугольника, образованного сторонами угла и данной прямой.

143. Найти геометрическое место точек такого рода, чтобы одна из биссектрис углов, образуемых прямыми, соединяющими эту точку с двумя данными точками A и B, имела данное направление.

Линии второго порядка. Общее исследование уравнений.

146. Определить вид линий: 1) $3x^2-2xy+3y^2 \quad 2x+2y+1=0$, 2) $x^2+6xy+y^2+6x+2y \quad 1=0$, 3) $x^2+2xy+y^2+2x-2y-1 \quad 0$.

147. Определить в уравнении $3x^2-2xy+3y^2-2x+2y+k=0$ число k так, чтобы этому уравнению соответствовала точка. Найти эту точку.

148. В уравнении $x^2-2\lambda xy+4y^2+2x-\lambda y-0$ подобрать λ так, чтобы оно представляло две прямые. Найти уравнения этих прямых.

149. В уравнении $2x^2+kxy+2y^2-7x+ly+6=0$ определить так коэффициенты k и l, чтобы уравнению соответствовали две параллельные прямые.

150. Найти прямые, выражаемые уравнением $x^2-2xy\operatorname{Sec}\varphi+y^2=0$ и угол между ними.

151. Найти ур-ние линии 2-го порядка, проходящей через точки M_1 (1,1), M_2 (2,—1), M_3 (1,—2), M_4 (—1,1) и M_5 (3,0).

152. Найти параболу, проходящую через точки A (1,0), B (2,0), C (0,1), D (0,4).

153. Найти точки пересечения линии $x^2-2xy-y^2+2x-y-3=0$ с прямою $y=2x-2$.

154. Через точку (1,2) провести прямые асимптотического направления линии 2-го порядка $4x^2 \quad 4xy-3y^2+x+y-2=0$.

155. Найти ур-ния асимптот кривой $2x^2-xy+3x-y-1=0$.

156. Найти асимптоты гиперболы $x^2+\frac{3}{2}xy-y^2-2x+y-1=0$.

157. Найти уравнения асимптот кривой $(ax+by+c)^2-(a'x+b'y+c')^2=k^2$.

158. Найти касательные к линии $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$, параллельные осям координат.

159. Найти общую касательную к линиям $y^2-4x=0$ и $y^2-2x-2=0$.

160. Найти уравнение гиперболы, проходящей через начало координат и имеющей асимптотами прямые $x-1=0$ и $y-1=0$.

161. Написать общее уравнение линий 2-го порядка, касающихся оси OX в начале координат.

162. Найти ур-ние линии 2-го порядка, касающейся оси OX в точке (1,0), оси OY в точке (0,1) и касательной к прямой $x+y-2=0$.

163. Дана окружность $x^2+y^2-1=0$ и два ее диаметра $x+2y=0$, $2x+y=0$. Найти ур-ния совокупностей противоположных хорд, соединяющих концы диаметров.

164. Дана окружность $x^2+y^2-5=0$ и совокупность двух сторон $\triangle$-ка в нее вписанного: $(3x-2y-4)(x+y-3)=0$. Найти ур-ние третьей стороны.

Центр и диаметры.

165. Найти координаты центра линии $x^2+xy+2x+y-2=0$ и перенести начало координат в цёнтр, не меняя направления осей.

166. Перенести начало координат в центр, не меняя направления осей: $15x^2+20xy+4y^2+30x+4y+1=0$ (не находя координат центра).

167. Найти ур-ние гиперболы, асимптоты которой $x+y-1=0$, $2x-y+1=0$ и которая проходит через точку M (1,1).

168. Составить общее ур-ние линий 2-го порядка, центр которых в точке (x_c, y_c).

169. Преобразовать ур-ние гиперболы $(ax+by+d)(\alpha x+\beta y+\delta)+\kappa=0$, перенеся начало координат в центр без изменения направления осей.

170. Найти г. м. центров центральных кривых, касающихся оси OX в точке (1,0) и оси OY в точке (0,1).

171. Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через данную точку A и отсекающих на данной прямой отрезок постоянной длины.

172. Найти хорды, с которыми сопряжен диаметр $2x-5y-3=0$ линии $2x^2-xy-y^2+x-2y+1=0$.

173. Найти хорды, с которыми сопряжен диаметр $x-2y+3=0$ линии $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$.

174. Найти уравнение диаметра линии $2x^2-xy-y^2+x-2y+1=0$, проходящего через точку $(-2,0)$.

175. Через точку M (1,2) провести диаметр линии $4x^2-4xy+y^2-x-y-1=0$.

176. Найти уравнение диаметра линии $x^2-xy-y^2-x-y=0$, параллельного прямой $3x+2y-1=0$.

177. Найти общий диаметр линий $x^2-xy-y^2-x-y=0$ и $x^2+2xy+y^2-x+y=0$.

178. Найти диаметр общий для кривых:

$$(x-y)^2+2Dx+2Ey+F=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

179. Найти асимптоты гиперболы $2x^2+5xy+2y^2+3y-1=0$, рассматривая их как самосопряженные диаметры.

180. Дана линия второго порядка $x^2-xy+y^2+x-2y-2=0$. Провести через точку (1,2) прямую линию так, чтобы образуемая ею хорда делилась в этой точке пополам.

181. Дана линия второго порядка $x^2+2xy+y^2+3x-3y-4=0$. Провести через точку (0,2) прямую линию так, чтобы образуемая ею хорда делилась в этой точке пополам.

182. Найти линию второго порядка, проходящую через начало координат и через точки (0,1) и (1,0) и имеющую центр в точке (2,3).

183. Дана линия 2-го порядка уравнением $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$. Найти середину ее хорды, уравнение которой $x + 3y - 12 = 0$.

184. Найти два сопряженные диаметра линии $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 5x - y - 2 = 0$, из которых один проходит через начало координат.

185. Найти оси симметрии линий. 1) $x^2 + xy + y^2 - x + y + 1 = 0$ и 2) $x^2 + xy + y^2 = 0$.

186. Найти оси симметрии линий: *a*) $x^2 + 8xy + 8y^2 + 4x + 8y = 0$, *b*) $x^2 - 4x + 4y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$, *c*) $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$. $\theta = 60^\circ$.

Приведение к простейшему виду.

Привести к простейшему виду, найти координаты центра, ур-ния осей симметрии, асимптоты, составить формулы для перехода для следующих линий.

187. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y - 80 = 0$.

188. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y - 9 = 0$.

189. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$.

190. $13x^2 + 12xy + 4y^2 - 50x - 28y - 11 = 0$.

191. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

192. $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$.

193. $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$.

194. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

196. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 242x - 298y + 491 = 0$.

196. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y = 0$.

197. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.

198. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

199. $4xy + 4y = 1$.

200. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 14x + 2y + 5 = 0$.

201. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

202. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 28x + 4y - 20 = 0$. $\theta = 120^\circ$.

203. $x^2 - 14xy + y^2 - 4x + 28y - 44 = 0$. $\theta = 120^\circ$.

204. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 2y + 16 = 0$. $\theta = 120^\circ$.

205. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$. $\theta = 60^\circ$.

206. $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$. $\theta = 60^\circ$.

207. $x^2 - xy + y^2 + x - 2y - 2 = 0$. $\theta = 60^\circ$.

208. $13x^2 + 18xy + 10y^2 - 44x - 38y + 33 = 0$. $\theta = 60^\circ$.

209. $x^2 - xy - 3x + y - 4 = 0$. $\theta = 120^\circ$.

210. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 7y + 10 = 0$. $\theta = 120^\circ$.

211. $x^2 + y^2 = 1$. $\theta = 60^\circ$.

212. $x^2 - y^2 = 1$. $\theta = 60^\circ$.

213. $xy - 1 = 0$. $\theta = 60^\circ$.

214. $y^2 = 2px$. $\theta = 60^\circ$.

215. $x^2 + y = 0$. $\theta = 120^\circ$.

216. Найти ур-ние вещественной оси симметрии гиперболы, у которой прямые $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ асимптоты и которой принадлежит точка M (1,1).

217. Найти ур-ние гиперболы, асимптота которой $x+y-1=0$ и на которой точки M_1 (1, 1), M_2 (2, 1), M_3 (— 1, — 2).

218. Найти равнобочную гиперболу, взаимно-сопряженные диаметры которой $x+2y+1=0$, $2x+y-1=0$ и на которой лежит точка M (1, 1).

219. Найти равнобочную гиперболу, асимптота которой $x-y+1=0$ и на которой лежат точки M_1 (1, 1), M_2 (2, 1).

220. Найти уравнение кривой 2-го порядка, имеющей прямую $x+y+1=0$ осью и проходящей через точки (0, 0), (1, — 1), (2, 1).

221. Найти линию 2-го порядка, для которой прямые $x-2y-1=0$, $2x-y+1=0$ сопряженные диаметры и которая проходит через точки M_1 (1, 0), M_2 (0, 1).

222. Найти параболу, для которой прямая $x+y-1=0$ диаметр, прямая $x+2y-1=0$ касательная, сопряженная с диаметром, и известно, что парабола проходит через точку (0, 0).

223. Доказать, что ось параболы $[(x-a)^2+(y-b)^2-c^2](1+m^2)-(y-my)^2=0$, где a, b, c — данные числа, а m переменный параметр, проходит через постоянную точку.

224. Найти уравнение параболы, касающейся оси OY в начале координат и имеющей прямую $x+y+1=0$ касательною в вершине.

225. Написать уравнение параболы, проходящей через точки (0, 1), (0, — 1), (1, 1) и имеющей ось, параллельную прямой $x-y=0$.

226. Найти параметр параболы, касающейся сторон координатного прямого угла в точках M $(u, 0)$ и N $(0, v)$.

227. Прямая $x+y-1=0$ ось параболы, проходящей через точки (0, 0) и (0, 1). Найти уравнение параболы.

228. Дана асимптота равнобочной гиперболы $x+y=0$, точка кривой (1, 1) и касательная $2x-y+1=0$; найти уравнение этой гиперболы

229. Составить общее уравнение равнобочных гипербол, центр которых в точке (x_c, y_c).

230. Найти эллипс, оси которого $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ и который проходит через точки M_1 (— 2, — 1) и M_2 (0, — 1).

231. Найти кривую 2-го порядка, у которой сопряженные диаметры $x-y+1=0$ и $2x-y-1=0$ и которая проходит через точки M_1 (— 1,0) и M_2 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Убедиться до решения задачи, что искомая кривая эллипс.

232. Парабола имеет диаметром прямую $x-y-1=0$ и касается прямой $x+y+1=0$ в точке пересечения ее с этим диаметром. Параметр параболы равен $\sqrt{2}$. Найти эту параболу.

233. Найти параболу, у которой $x-y+1=0$ диаметр, $2x-y+1=0$ касательная в точке пересечения ее с диаметром и на которой лежит точка (0, 0).

234 Найти эллипс, для которого прямые $x+y-1=0$, $x-y+1=0$ сопряженные диаметры и полуоси которого 2 и 1.

235. Найти ур-ние эллипса, длины полуосей которого $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и для которого прямые $x+2y-4=0$, $x-3y+2=0$ взаимно-сопряженные диаметры.

Задачи на кривые 2-го порядка, заданные ур-ниями в каноническом виде.

236. Найти ур-ния диаметров эллипса $\frac{x^2}{2}+3y^2=1$, длина которых равна 2.

237. Найти ур-ния тех диаметров гиперболы $\frac{4}{3}x^2-2y^2=1$, длина которых равна 2, и длины диаметров, с ними сопряженных, а также углы между этими взаимно-сопряженными диаметрами.

238. Найти угол между равными диаметрами эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

239. Найти сопряженные диаметры гиперболы $x^2-y^2=1$, угол между которыми 45°.

240. Найти взаимно-сопряженные диаметры эллипса $\frac{1}{5}x^2+3y^2=1$, угол между которыми 150°.

241. Взяв равные сопряженные диаметры эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ за координатные оси X_1Y_1, составить новое уравнение эллипса и формулы для перехода к осям симметрии.

242. Дано уравнение параболы $y^2=2px$. Уравнение той же параболы, отнесенной к диаметру и касательной, угол между которыми есть φ, имеет вид: $y_1^2=2qx_1$. Найти зависимость между p, q и φ.

243. Найти параметр параболы по хорде, соединяющей точки $M\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ и $N\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ параболы и сопряженной с диаметром, проходящим через точку A (1, 1) параболы.

244. Один из двух сопряженных диаметров эллипса, угол между которыми 120°, вдвое более другого. Найти эксцентриситет этого эллипса.

245. Найти уравнения двух сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$ длины которых относятся как 4 : 3.

246. Найти длины двух сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$, составляющих наибольший угол.

247. Даны оси эллипса $a=\sqrt{3}$ и $b=1$. Найти длины двух его сопряженных диаметров, из которых один составляет угол в 30° с большой осью.

248. Гипербола, отнесенная к осям, проходит через точку (6,5). Найти ее уравнение, если эксцентриситет ее равен $^3/_2$.

249. Найти угол между двумя сопряженными диаметрами гиперболы, зная отношение их и эксцентриситет.

250. Показать, что прямые, соединяющие точки пересечения осей эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с кругом $x^2+y^2=a^2+b^2$, касаются эллипса.

251. Найти длины двух сопряженных диаметров гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, сумма которых относится к сумме осей, как 5 к 2.

252. Найти угол между асимптотами гиперболы, зная, что сопряженные диаметры, угол между которыми 45°, относятся как 2 к 3.

253. Эксцентриситет гиперболы $xy = 25$ равен $\frac{5}{4}$. Найти длины ее осей.

254. Найти уравнение эллипса, для которого $\left\{\begin{matrix} 3x - 4y + n = 0 \\ x + l = 0 \end{matrix}\right\}$ суть сопряженные диаметры, а полуоси 2 и 1; n и l — произвольны.

255. Прямой угол вращается около вершины, находящейся в вершине параболы. Найти геометрическое место середин хорд, соединяющих точки пересечения сторон угла с параболой.

256. Найти геометрическое место точки пересечения кругов, построенных на сопряженных полудиаметрах эллипса как на диаметрах.

257. Найти геометрическое место середин хорд эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, соединяющих концы его сопряженных диаметров.

258. Через точки A и B на параболе проводятся окружности, которые пересекают параболу в переменных точках C и D. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.

259. Дана окружность; концы одного ее диаметра соединены прямыми линиями с концами хорды, имеющей данное направление. Найти геом. м. точек пересечения этих прямых.

260. Дана окружность $x^2 + y^2 = r^2$. Через точки $(r, 0)$ и $(-r, 0)$ проведены хорды так, что прямая, соединяющая другие их концы, перпендикулярна к оси OX. Найти геом. м. точки пересечения продолжений этих хорд.

261. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Через верхний конец P малой оси проводятся хорды. Найти геометрическое место середин этих хорд.

262. Отрезок постоянной длины l движется своими концами по сторонам прямого угла. Какую линию опишет точка P на этом отрезке, разделяющая его в отношении m к n.

263. Найти геометрическое место точек пересечения перпендикуляров из концов малой оси на сопряженные диаметры эллипса.

264. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров из центра эллипса на хорды, стягивающие прямой угол при центре.

Фокусы и директрисы.

265. Расстояние между фокусами эллипса равно 2, расстояние между его директрисами 10. Найти полуоси этого эллипса.

266. Найти эксцентриситет гиперболы, если известно, что директрисы делят расстояние между фокусами на три равные части.

267. Эксцентриситет гиперболы (астрономический) равен 2; найти угол между асимптотами.

268. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$; найти софокусный с нею эллипс, проходящий через точку (4,6).

269. Дано отношение $\frac{r_1}{r_2} = m$ радиусов-векторов некоторой точки эллипса и угол α между ними. Найти астрономический эксцентриситет этого эллипса.

270. Найти фокус и директрису параболы $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$.

271. Найти фокусы и директрисы кривой $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$.

272. Найти фокусы и директрисы линии $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$.

273. Найти фокус и директрису параболы $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$.

274. Найти уравнения директрис для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a^2 < b^2$ и $\theta = 90°$.

275. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; написать уравнение равнобочной гиперболы, имеющей те же директрисы, когда $a^2 > b^2$ и $a^2 < b^2$.

276. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

277. Найти расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от асимптоты.

278. Найти общие ур-ния эллипсов (гипербол), имеющих фокусы в точках F_1 $(c,0)$ и F_2 $(-c,0)$.

279. Найти ур-ние линии, фокус которой в точке F $(-1,1)$, директриса которой, соответствующая фокусу F, имеет ур-ние $x + y - 2 = 0$ и которая проходит через начало координат.

280. Найти эллипс, проходящий через точку M (4,2) и имеющий фокусы в точках F_1 (4,3) и F_2 $(0, -1)$.

281. Найти равнобочную гиперболу, директриса которой $x + y - 1 = 0$, а фокус F (1,1).

282. Найти ур-ния парабол, директриса которых прямая $x + y - 1 = 0$ и которые проходят через точки M (1,1) и M_1 (1,2).

283. Найти ур-ние линии 2-го порядка, директрисы которой прямые $x - 2y - 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$ и фокус которой точка F (2,1).

284. Доказать, что расстояние фокуса от какой-нибудь точки гиперболы равно отрезку прямой, параллельной асимптоте и проходящей через M, начало которого в M, а конец на директрисе.

285. Найти эксцентриситет (астрономический) эллипса, если его малая ось видна из фокуса под прямым углом.

286. Даны фокусы кривой 2-го порядка F_1 (3,6) и F_2 $(-3, -6)$ и ее эксцентриситет $\sqrt{\frac{5}{9}}$. Найти уравнение линии.

287. Кривая 2-го порядка, проходящая через точку $(0, -1)$, имеет центр в точке (1,1), а директрисою прямую $x + 2y + 1 = 0$. Найти ее уравнение.

288. Найти ур-ния линий 2-го порядка, проходящих через точки M_1 (0,1), M_2 (1,0), M_3 (0,2) и имеющих фокусом точку F (1,1).

289. Найти равнобочную гиперболу, директриса которой $x + y + 1 = 0$, а фокус F (1,1).

290. Найти ур-ние линии 2-го порядка, проходящей через точки M_1 (4,5) и M_2 $(-3,4)$, имеющей фокусом точку F (1,1), а осью симметрии, содержащей фокус, прямую $x + y - 2 = 0$.

291. Найти г. м. фокусов парабол, проходящих через точку $M(1, -1)$ и имеющих директрисой прямую $x + y + 1 = 0$.

292. Рассматривается система парабол, проходящих через данную точку и имеющих данную прямую директрисой, найти геометрическое место их вершин.

293. Составить уравнение параболы, проходящей через начало, по уравнениям директрисы $x+y+1=0$ и оси $x-y-1=0$.

294. Линия $x \quad y=0$ — ось параболы, проходящей через точку $(1, \quad 1)$, а точка $(0,0)$ — фокус. Найти уравнение параболы.

295. Найти уравнение параболы, зная вершину $(0,0)$ и фокус $(1,1)$.

296. Найти геометрическое место центров равнобочных гипербол, проходящих через точку $(0,0)$ и имеющих директрисою прямую $x+y+1=0$.

297. Найти уравнение гиперболы, имеющей фокус в начале координат, асимптотою прямую $x \quad 1$ и проходящей через точку $(0,1)$.

298. Прямые $x \quad y+1=0$, $x+y-1=0$ — асимптоты гиперболы, имеющей фокус в точке $(0,2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

299. Найти геометрическое место фокуса равнобочных гипербол, проходящих через начало координат и имеющих прямые $+x+y-1=0$ директрисами, соответствующими этому фокусу.

300. Геометрическое место фокуса равнобочных гипербол, проходящих через M $(1,-1)$, есть $x^2+y^2 \quad 2x+2y+1=0$. Найти уравнения директрис, соответствующих этому фокусу и проходящих через начало координат.

301. Прямые $2y+x-27=0$, $2y+x+27=0$ — директрисы линии 2-го порядка; эксцентриситет ее равен $\sqrt{\frac{5}{9}}$, и центр лежит на оси ординат. Найти ее уравнение.

302. Найти г. м. фокусов равносторонних гипербол, имеющих директрисой ось OY и отсекающих на оси OX постоянный отрезок величины a.

303. Полярное уравнение линии 2-го порядка $r=\frac{16}{5+3\cos\varphi}$; найти ее уравнение в Декартовых координатах.

304. То же для кривой $r=\frac{9}{4+5\cos\varphi}$.

Касательные к кривым 2-го порядка.

Разные задачи.

305. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$, проходящие через точку $(42,31)$.

306. Найти уравнения касательных, проходящих через точку $(21, -26)$, к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

307. Провести параллельно прямой $2x-3y=0$ касательные к эллипсу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1} \quad 1$.

308. Параллельно прямой $10x+3y=0$ провести касательные к гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

309. Через точку $(-1,3)$ провести касательные к параболе $y^2=7x$.

310. Дана гипербола $xy=k^2$, отнесенная к асимптотам. Составить уравнение касательной к гиперболе в точке (x_0, y_0).

311. Найти уравнение касательной в начале координат для кривой $5x^2+7xy+y^2-x-2y=0$.

312. Найти уравнение касательной к кривой $x^2-xy-y^2+2x+2y+1=0$ параллельной прямой $2x+2y-1=0$.

313. Найти уравнение касательной к кривой $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$, проходящей через точку $(2,1)$.

314. Найти расстояние от фокуса параболы $y^2=2px$ до касательной, составляющей угол α с осью параболы.

315. Найти угол, составляемый осью параболы с касательной в точке пересечения перпендикуляра из фокуса к оси параболы.

316. Доказать, что площадь, заключенная между касательной к гиперболе и ее асимптотами, имеет постоянную величину.

317. Показать, что в гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ произведение расстояний фокусов от касательной равно b^2.

318. Доказать, что произведение отрезков секущей между асимптотами и точкой на гиперболе равно квадрату полудиаметра, параллельного секущей.

319. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых от касательной двумя взаимно сопряженными диаметрами, есть величина постоянная, равная квадрату диаметра, параллельного касательной.

320. Доказать, что произведение расстояний фокусов от касательной равно квадрату полуоси, не содержащей фокусов.

321. Нормаль в точке M к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ пересекает малую ось в точке P. Если F фокус, то отношение $\frac{\text{дл. } MP}{\text{дл. } PF}$ постоянно.

322. Доказать, что отрезок, отсекаемый от оси параболы полярами точек M_1 и M_2, равен отрезку, отсекаемому от оси перпендикулярами на ось из M_1 и M_2.

323. Найти ур-ние гиперболы, для которой точка M $(0,0)$ фокус, а прямые $x-y-1=0$, $2x-y-1=0$, $x+y-1=0$ касательные. *Указание* Расстояние от фокуса до отражения другого фокуса в касательной равно $2a$ (длине большей оси).

324. Найти уравнение параболы, проходящей через точку M $(5,0)$, для которой прямая $x-3y-7=0$ служила бы касательной, а точка F $(3,2)$ — фокусом.

325. Найти уравнение параболы с фокусом в точке F $(3,2)$, для которой ось OX служила бы касательною, проведенною из точки пересечения оси симметрии с директрисой.

326. Около точки A внутри данного круга вращается прямой угол; через точки пересечения его сторон с окружностью проводятся касательные к кругу. Найти геометрическое место точки пересечения этих касательных.

327. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся оси OY и круга $x^2+y^2=1$.

328. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные.

329. Найти точку пересечения поляр точек, расположенных на директрисе.

330. Найти такую точку на прямой $y = 2x + 1$, чтобы поляра ее по отношению к эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ проходила через точку (1,1).

331. Для параболы $y^2 = 2px$ найти геометрическое место проекции фокуса на нормали.

332. Даны софокусные линии $\frac{x^2}{a^2 + h} + \frac{y^2}{b^2 + h} = 1$, h переменное. Найти г. м. точек касания касательных данного направления.

333. Нормаль к параболе в точке M пересекает ее ось в точке P. Продолжив нормаль на отрезок $PM' = MP$, найти г. м точек M'.

334. Равнобочная гипербола, проходящая через начало координат, имеет асимптотою прямую $x + y + 1 = 0$. Найти геометрическое место точек пересечения второй асимптоты с касательною в начале координат.

335. Найти геом. место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

Примечание. Углом, под которым видна кривая 2-го порядка из некоторой точки, называется угол между касательными, проведенными к кривой из этой точки.

336. Найти г. м. точек, из которых эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ виден под прямым углом.

337. Найти г. м. точек, из которых парабола $y^2 = 2px$ видна под углом α.

338. Найти геометрическое место вершин равнобочных гипербол, проходящих через данную точку и имеющих асимптотою данную прямую.

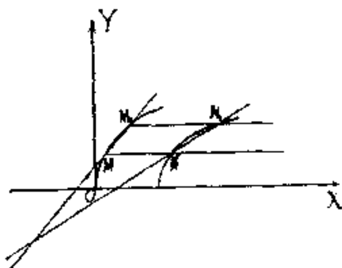
339. Найти геометрическое место центров равнобочных гипербол, описанных около данного треугольника.

340. Найти геометрическое место центров гипербол, проходящих через две данные точки и имеющих асимптоты, параллельные данным прямым.

341. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к параболе две нормали под прямым углом.

342. Даны две параболы: $y^2 = 2px$; $y^2 = 2p(x - a)$. Доказать, что хорды первой, касающиеся второй, делятся пополам точкой касания.

343. Две параболы, имеющие общую ось симметрии, пересечены рядом прямых, -ных оси симметрии. Доказать, что точки пересечения хорд парабол, соединяющих точки пересечения любых двух диаметров с параболами, лежат на одной прямой (Черт. 15).



Черт 15.

344. Найти ур-ние параболы, фокус которой $F(1, -1)$ и которая касается прямых $x \quad 2y \quad 1 = 0$ $x + y \quad 1 = 0$.

345. Найти уравнение параболы, касающейся прямых $x - y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ и имеющей директрисою прямую $x - 2y = 0$.

346. Найти геометрическое место вершины параболы, имеющей данный фокус и касающейся данной прямой.

347. Круг, описанный около треугольника, составленного тремя касательными к параболе, проходит через фокус.

348. Равнобочная гипербола, описанная около треугольника, проходит через точки пересечения высот.

349. Найти геометрическое место центров тяжести равносторонних треугольников, образованных тремя касательными к параболе.

350. Найти геометрическое место фокуса параболы, имеющей данную вершину и касающейся данной прямой.

351. Найти геометрическое место точек пересечения ординат эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с прямыми, проведенными из центра перпендикулярно к касательным в концах ординат.

352. Найти геометрическое место центров тяжести равносторонних треугольников, образованных тремя нормалями к параболе.

353. Из внешней точки к параболе могут быть проведены вообще три нормали. Доказать, что окружность, проведенная через основание этих нормалей, проходит через вершину параболы. Найти уравнение этой окружности.

354. Переменный круг касается эллипса в данной точке. Найти геометрическое место точек пересечения общих касательных.

355. Фокусы эллипса F и F' соединяются с переменною точкою M эллипса. Найти геометрическое место центров кругов, вписанных в треугольник MFF'.

356. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух заданных окружностей с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2.

357. Доказать, что четыре точки эллипса: $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, соответствующие значениям параметра φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, тогда и только тогда лежат на окружности круга, когда $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=2k\pi$.

358. Доказать, что четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) параболы $y^2 = 2px$ тогда и только тогда лежат на окружности круга, когда $y_1+y_2+y_3+y_4=0$.

Координаты в пространстве.

359. Найти наименьший угол между диагоналями прямого прямоугольного параллелепипеда, соединяющими противоположные вершины. Ребра параллелепипеда суть $2a$, $2b$ и $2c$, при чем $a>b>c$.

360. Найти расстояние между точками M_1 (1,1, 2) и M_2 (2,1, 1). Углы между осями координат: $XOY=60°$, $XOZ=YOZ=90°$.

361. Найти *cosinus* угла между прямыми, расположенными в плоскостях XOY и ZOX и делящими соответственно углы XOY и ZOX пополам. Оси координат прямоугольны.

362. Найти объем параллелепипеда, ребра которого 1,1, 2, а плоские углы, образующие некоторый трехгранный угол, равны 120°, 150° и 60°.

363. Найти точку M на прямой, соединяющей точки M_1 (1,2, —1) и M_2 (—1,2, 1), не лежащую между точками M_1 и M_2 и такую, что $\frac{\text{дл. } M_1M}{\text{дл. } MM_2}=2$.

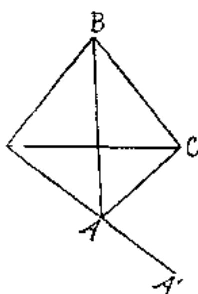
364. Взяв стороны правильного тетраедра за координатные оси, найти координаты середин его ребер и проекций вершин на противоположные грани (длина сторон тетр. — 1).

365. Найти точки A, B, C на трех координатных плоскостях так, чтобы тетраедр $OABC$ (O начало) был правильный с длиною ребра l.

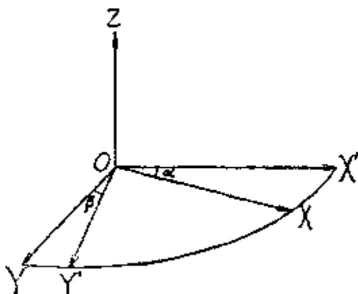
366. На осях координат даны точки A, B, C на расстоянии 1 от начала 0. За новые оси берут прямую BA, перпендикуляр из C на BA в плоскости ABC и перпендикуляр к этой плоскости. Составить формулы для перехода.

367. Преобразовать ур-ние $x^2+y^2+2z^2-2xy-2z\sqrt{2}(x+y)=a^2$, взяв за новые оси OX', OY' и OZ', где OX' образует с OX и OY углы в $\frac{\pi}{3}$ и острый угол с OZ, а OY' образует с OX угол в $\frac{\pi}{4}$ и тупой угол с OY. Все оси координат прямоугольны.

368. Дан правильный тетраедр. Сначала за координатные оси взяты ребра OA, OC и OB, потом ребра AA', AC и AB. Составить формулы для перехода от одних осей к другим. Длина ребра тетраедра $=a$ (см. черт. 16).



Черт. 16



Черт. 17.

369. Взять за новые координатные оси OX', OY' и OZ' соответственно биссекторы углов XOY, XOZ и YOZ между старыми осями. Старые оси прямоугольны. Найти углы между новыми осями.

370. Найти формулы для перехода от прямоугольных осей XYZ к осям $X'Y'Z'$. Оси OX' и OY' расположены в плоскости XOY. Углы α и β отсчитаны в направлении против часовой стрелки (см. черт. 17).

371. Взять за новые оси прямые, расположенные в плоскости XOY, ур-ния которых относительно осей XOY: $x+2y-1=0$, $2x-y+1=0$. Направление оси OZ не менять. Составить формулы для перехода.

372. Углы между старыми осями XYZ равны 60°. Выпрямить координатные оси, не меняя положения плоскости XOY и направления оси OX, поворачивая оси OY и OZ на возможно меньшие углы.

373. По каким кривым пересекаются цилиндры $x^2+2y^2=a^2$, $x^2+2z^2=a^2$?

374. Найти г. м. точек, равноудаленных от точек M_0 (x_0, y_0, z_0) и M_1 (x_1, y_1, z_1). Оси координат прямоугольны.

375. Найти г. м. точек, расстояния которых до двух данных точек находятся в постоянном отношении, и доказать, что искомое геометрическое место точек сфера.

376. Найти координаты центра и радиус шара $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$.

377. Найти точки пересечения поверхностей $2x^2-3y^2+z^2=0$, $x^2+y^2-z^2=1$, $x^2-y^2+z^2=1$.

Плоскость.

378. Взяв ребра тетраэдра за координатные оси, найти ур-ния плоскостей, проходящих через ребро и середину противоположного ребра, и доказать, что эти шесть плоскостей пересекаются.

379. Найти ур-ние плоскости, проходящей через точки M_1 (2,1,1), M_2 (1,2,1) и M_3 (2,2,1).

380. Найти ур-ния сторон тетраэдра, вершины которого в точках M_1 (1,1,1), M_2 (—1,1,1), M_3 (1,—1,1) и M_4 (1,1,—1).

381. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M (1,2,1) и образующей на осях OX и OY отрезки, соответственно равные 2 и 3.

382. Найти углы, образованные перпендикуляром к плоскости $x - 2y \; z \; 1 = 0$ с осями координат.

383. Определить линейный угол, измеряющий тот двугранный угол между плоскостями $2x + 2y - z - 1 = 0$, $x + 4y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка M (1,1,1).

384. Через точку M (1, —1,1) провести плоскость перпендикулярно к плоскостям $x - y \; z - 1 = 0$, $2x \; y \; z - 1 \; 0$.

385. Через точки M (1,1,1) и M_1 (2,2,2) провести плоскость перпендикулярно к плоскости $x + y - z \; 1 = 0$.

386. Через точки M (2,0,0) и M_1 (0,2,0) провести плоскости под углом в 45° к плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

387. Узнать, лежит ли начало координат внутри тетраэдра задачи № 388.

388. Найти объем тетраэдра, стороны которого $x + y + z - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - z - 1 = 0$, $z - 2 = 0$.

389. Вычислить объем тетраэдра M_1 (1,1,1), M_2 (1,1,1), M_3 (1,—1,1), M_4 (1,1—1).

390. Найти расстояние точки M (2,1,1) от плоскости $x + y \; z + 1 = 0$.

391. Найти расстояние точки M (x_1, y_1, z_1) от плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$, зная, что точка M отделена от начала координат данною плоскостью.

392. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

393. На оси OZ найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $12x + 9y - 20z - 19 = 0$ и $16x - 12y + 15z - 9 = 0$.

394. Найти ур-ние плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между плоскостями $x + 2y - z - 1 = 0$, $x + 2y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка M (1, — 1,1).

395. Найти уравнение плоскости, расположенной между параллельными плоскостями $x - 2y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z - 3 = 0$ и делящей расстояние между ними соответственно в отношении 1 : 3.

396. Проверить, что плоскости, перпендикулярные к ребрам тетраэдра и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

397. Найти объем тетраэдра: $x + 2y \; z - 2 = 0$, $2x - y + z - 2 = 0$, $x + y - 2z = 0$, $x + y + z - 3 = 0$.

398. Проверив, что плоскости $x + 2y - z - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y + 5z + 1 = 0$ взаимно перпендикулярны, взять их соответственно

за новые плоскости координат $X_1O_1Y_1$, $X_1O_1Z_1$ и $Y_1O_1Z_1$, приписав новым координатным осям такие направления, чтобы новые координаты старого начала были положительны. Составить формулы для перехода.

399. Найти общий вид плоскостей, пересекающих по равностороннему треугольнику призму, образованную плоскостями $x=0$, $y=0$ и $x+y-1=0$.

400. Найти площадь $\triangle$-ка, вершины которого. $M(1, 1,1)$, $M_1(2,1,-1)$ и $M_2(-1, -1, -2)$.

401. В уравнении плоскости $x+y+lz=0$ определить l из того условия, чтобы через ось OX можно было провести только одну плоскость, составляющую с первой плоскостью угол в $30°$

402. Около призмы $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$ описать прямой круговой цилиндр.

403. Проверив, что плоскости $3x-y-z+2=0$, $x-y+z=0$ $4x-y-2z+l=0$ образуют призму найти l так, чтобы плоскости пересекались по прямой.

404. Найти точку пересечения плоскостей $x+2y-z-2=0$, $3x-y+z-3=0$, $x+2y+z-4=0$.

405. Найти общее ур-ние плоскостей, проходящих через точку M $(1,1,1)$ и касающихся сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

406. Найти геометрическое место центров сфер, пересекающих две данные сферы по большим кругам.

Прямая.

407. Найти плоскости, проектирующие прямую $x-2y-z+1=0$ $2x+y+2z+3=0$ на плоскости координат. Дать уравнениям прямой вид пропорции.

408. Представить в виде пропорции ур-ния прямых:

$$a)\ \left.\begin{matrix} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{matrix}\right\} \quad b)\ \left.\begin{matrix} x+y-z=0 \\ x+y-2z=1 \end{matrix}\right\} \quad c)\ \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x-y=0 \end{matrix}\right\}$$

409. Найти углы, образованные прямыми $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$ с осями координат и между собою.

410. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=0 \\ x-1=2(z-1) \end{cases}$

411. Найти угол W между прямою $\begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-2y-z+1=0 \end{cases}$ и плоскостью $x-y+z-1=0$.

412. Доказать, что плоскость, в которой лежат проекции точки M на плоскости координат, делит отрезок, соединяющий M с началом координат, в отношении, не зависящем от положения M.

413. Провести прямую через точки M_1 $(2, 1, 2)$, M_2 $(1, 2, 1)$.

414. Провести прямую через точки: *a*) M $(1, 2, 1)$, M_1 $(1, 3, 2)$; *b*) M $(2,1,1)$, M_1 $(3, 1, 1)$.

415. Через точку M $(1, 2, 1)$ провести прямую, $\perp$-но к плоскости $x+2y-z=0$

416. Через точку M (2, 2, 1) провести плоскость $\perp$-но к прямой: $x+2y-z+1=0$, $2x+y-z+1=0$.

417. Через точку M (3, 2, 1) провести прямую $\parallel$-но прямой: $2x-y-z-1=0$, $x+2y-z+2=0$.

418. Через точку M (1, 1, 2) провести плоскость $\parallel$-но прямым: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$.

419. Через точку M (2, 1, 2) провести прямую, $\parallel$-ную плоскостям $x-y-1=0$, $x+y+1=0$.

420. Через прямую $2x-y+z-1=0$, $x+y-z+1=0$ и точку M (2, 1, 1) провести плоскость.

421. Через прямую $x-1=0$, $x+2y-z-1=0$ провести плоскость, перпендикулярно к плоскости $x+y+z-1=0$.

422. Через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ провести плоскость $\parallel$-но прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$.

423. Через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость $\perp$-но к плоскости $2x+y+2z-1=0$.

424. Через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ и точку M (3, 2, 1) провести плоскость.

425. Провести плоскость через точки M_1 (2, 1, 1), M_2 (—1, 2, 2), M_3 (4, 3, —1).

426. Найти проекцию прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ на плоскость $x+2y-z-1=0$.

427. Найти ур-ние плоскости, проходящей через перпендикуляр из точки M (1, —1, 1) на прямую $\begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ и перпендикулярной к плоскости $z=0$.

428. Найти уравн. и длину высоты $\triangle$-а, образуемого пересечением плоскости $3x-y+4z-12=0$ с координатными плоскостями, при условии, что вершина $\triangle$-а лежит на оси OZ.

429. Через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямою $\begin{cases} y=1 \\ z+1=0 \end{cases}$ провести прямую, лежащую в этой плоскости и образующую с данной прямой наименьший угол.

430. Найти отражение точки M (1, —1, 1) в плоскости $x+2y-z+1=0$.

Примечание. См. зад. 98, отд. I.

431. Найти прямые, лежащие в плоскости $x+y+z+1=0$ и перпендикулярные к прямой $\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$, лежащей в той же плоскости.

432. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $\begin{cases} y=1 \\ z+1=0 \end{cases}$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

433. Найти ур-ния и длину перпендикуляра, опущенного из точки M (0, —1,1) на прямую $y+1=0$, $x+2z-7=0$.

434. Найти прямую, проходящую через точку $M(0, 1, 1)$, образующую прямой угол с прямой $y+1=0$, $x+2z-7=0$ и пересекающую прямую $x-1=0$, $z+1=0$.

435. Найти ур-ния перпендикуляра, проектирующего точку $M(0, 3, 1)$ на прямую $\begin{cases} z-1=0 \\ x+y-1=0. \end{cases}$

436. Найти ур-ния прямой, лежащей в плоскости $x-y+z-1=0$ и проходящей через точки пересечения ее с прямыми $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1 \\ z=0. \end{cases}$

437. Найти ур-ние плоскости, проходящей через начало координат и через перпендикуляр из точки $M(1, -1, 0)$ на прямую $x=z+3$, $y=-2z-3$.

438. Найти уравнения общего перпендикуляра к прямым $\begin{cases} x+4z+1=0 \\ x-4y+9=0, \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x+2z+4=0 \end{cases}$

439. Найти ур-ния проекций перпендикуляра из точки $M(2, 1, 1)$ на плоскость $x+y+z-1=0$ на плоскости XY, XZ и YZ.

440. Через точку $M(1, -1, 1)$ провести прямую так, чтобы середина отрезка ее между плоскостями $x+2y-z+1=0$, $x+2y-z-3=0$ лежала на прямой $x=y=z$.

441. Найти ур-ние плоскости, в которой лежат прямые: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$.

442. Найти ур-ние плоскости, в которой лежат параллельные прямые $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$.

443. Найти ур-ния общего перпендикуляра к прямым: $x=0$, $y=z$ и $z=0$, $x+y-1=0$.

444. Найти ур-ния кратчайшего расстояния между прямыми: 1) $x+1=0$, $y-z+1=0$, 2) $z-2=0$, $x+y-1=0$.

445. Проверив, что прямые $\frac{x+1}{2}=1-y=z$ и $3-x=\frac{y+5}{2{,}5}=2z$ лежат в одной плоскости, найти уравнения биссекторов углов между ними.

446. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $(-1, 2, 1)$ на прямую, проходящую через начало координат и составляющую с осями углы в 120°, 60° и 45°.

447. Найти ур-ния прямых, делящих пополам угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$.

448. Найти на линии пересечения плоскостей $z=0$, $x-y+1=0$ точку, ближайшую к точке $M(0, 3, 1)$.

449. Стороны прямого прямоугольного параллелепипеда имеют длины a, b, c. Найти кратчайшие расстояния между его диагональю и непересекающими ее сторонами.

450. Найти прямые, пересекающие прямые $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} z=0 \\ x-1=0 \end{cases}$ и параллельные плоскости $x+y+z=0$.

451. Найти прямые, пересекающие три прямые: $\begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ z=0, \end{cases}$ $\begin{cases} y-1=0 \\ z+1=0 \end{cases}$.

452. Через прямую $2x - y = 2z$ провести плоскость P так, чтобы данная прямая была биссектрисой угла, образуемого линиями пересечения плоскости P с плоскостями $y = 0$ и $x + y = 0$.

453. Доказать, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссекторы противоположных сторон, пересекаются по прямой.

Образование поверхностей.

454. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух прямых $y = 0$, $z = 0$ и $y = x$, $z = 1$.

455. Найти уравн. г. м. прямых, проходящих через точку $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и перпендикулярных к прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

456. Найти уравн. г. м. прямых, образующих с плоскостью XOY угол в 45° и проходящих через точку $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

457. Составить уравн. г. м. прямых, пересекающих прямые $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$, $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ и параллельных плоскости $2x - 3y + z + 12 = 0$.

458. Найти уравн. поверхности, образуемой скольжением прямой линии по прямым 1) $x = 0$, $z = 0$; 2) $y = 0$, $z = 1$; 3) $x = 1$, $y = 1$.

459. Найти уравн. г. м. точек, равноудаленных от прямых: $x = y = z$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$.

460. Составить уравн. поверхности, образуемой скольжением прямой линии по прямым: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$; $x = y = z$.

461. Найти геометрическое место прямых, проходящих через ось OZ и параллельных плоскостям $x - y + 2z - 1 = 0$ и $2x - 3y - z + 1 = 0$.

462. Составить уравн. цилиндрич. поверхности, образующие которой параллельны прямой: $\left.\begin{matrix} 5x + 11y + 3z + 7 = 0 \\ 2x + 8y + 3z + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ и направляющая задана ур-иями: $4y^2 - 2z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0$ и $x + y - z = 0$.

463. Составить уравн. конической поверхности, вершина которой есть начало координат, а направлющая задана ур-ниями: $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ и $x + y - 3z = 1$.

464. Составить уравн. цилиндрич. поверхности, образующие которой перпендикулярны к плоскости, проходящей через прямые: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}$; $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$, а направляющая задана ур-ниями: $x = 1$ и $2y^2 + 3z^2 = x$.

465. Составить уравн. конической поверхности, вершина которой есть точка $(1, 1, 1)$, а направляющая задана уравнениями: $3y^2 + 2z^2 = x$ и $2x - y - z = 3$.

466. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки $M(x_0, y_0, z_0)$ на образующие конической поверхности $x_2 + y^2 - z^2 = 0$.

467. Найти ур-ние цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x = y = z$ и направляющая которой эллипс, расположенный в плоскости XOZ, ур-ние которого относительно осей XOZ: $x^2 + 4z^2 - 1 = 0$.

468. Найти ур-ния конических поверхностей, вершины которых в точке M (1,1,1), а направляющие суть соответственно: a) парабола, расположенная в плоскости XY, ур-ние которой относительно осей XOY: $x^2 + 4y^2 - 4xy \quad 6x \quad 2y + 3 = 0$; b) гипербола, расположенная в плоскости YZ, ур-ние которой относительно осей YOZ: $4y^2 + 4z^2 - 10yz - 2y + 2z + 3 = 0$, и c) эллипс, расположенный в плоскости XZ, ур-ние которого относительно осей XOZ: $x^2 + 4z^3 \quad 6x + 2z \quad 3 = 0$.

469. Найти поверхность, образуемую движением прямой, которая пересекает круг $z = 0$, $x^2 + y^3 = R^2$ и прямые: $y = 0$, $z = h$; $x = 0$, $z = -h$.

470. Найти уравнение конической поверхности, вершина которой есть точка $M(x, y, z_0)$, а направляющая $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z \quad 0$.

471. Найти уравнение поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости XY, скользит по оси OZ и по кривой $x \quad rCos(\alpha z)$, $y = rSin(\alpha z)$.

472. Найти уравнение поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости XY, скользит по оси OZ и по кривой $x = a$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

473. Найти уравнение поверхности, образуемой движением прямой, которая пересекает круг: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ и прямые: $x + 1 = 0$, $y = 0$; $x - 1 = y = z$.

474. Составить уравнение конической поверхности вращения, для которой оси OX, OY, OZ — образующие.

475. Прямая перемещается, опираясь на две данные прямые и оставаясь параллельной данной плоскости. Найти геометрическое место точек, делящих отрезок движущейся прямой между данными прямыми в данном отношении.

476. Найти уравнение поверхности, образуемой вращением прямой: $x = 2z + 1$, $y \quad z - 1$ около оси OZ.

477. Найти поверхность, образованную движением прямой, которая пересекает прямые: $x = 1$, $y = 0$ и $x = y = z$ и составляет с ними равные углы.

478. Через прямую $x = y = z$ провести плоскость так, чтобы линии пересечения ее с плоскостями: $y \quad 2x = 0$ и $y = 0$ были перпендикулярны.

479. Найти уравнение поверхности, образуемой прямой, две определенные точки которой скользят по двум перпендикулярным непересекающимся прямым.

480. Отрезок неизменной длины скользит концами по двум непересекающимся прямым. Найти геом. место его середины.

481. Найти поверхность, образованную движением круга, плоскость которого параллельна плоскости $x + y = 0$ и который пересекает ось OX, ось OY и прямую: $y = x$, $z = a$.

482. Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности, проходящей через прямые: $x = y = z$; $x + 1 = y = z - 1$; $x - 1 = y + 1 = z \quad 2$.

Поверхности 2-го порядка (Центр, диаметральные плоскости и т. д.).

483. Найти общее ур-ние поверхностей 2-го порядка, пересекаемых плоскостью XOY по кривой $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\eta y + \lambda = 0$.

434. Найти ур-ние поверхности 2-го порядка, на которой лежат круги: 1) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ 2) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z = 1 \end{matrix}\right\}$ 3) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$.

485. Через начало координат провести прямые асимптотического направления для поверхности $x^2 + 2y^2 - 4xy + 10xz - 4yz + x - z - 1 = 0$ и параллельные плоскости $3x + y - 4z - 3 = 0$.

436. Показать, что ур-нию $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2y + 1 = 0$ удовлетворяют только точки, лежащие на прямой $x - y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$.

437. Показать, что ур-нию $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 2y - 2z + 3 = 0$ удовлетворяют только координаты точки M $(-1, 1, 1)$.

488. Найти прямые, по которым поверхность конуса $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ пересекается с плоскостью $x + y + 2z + 5 = 0$.

489. Найти прямые, параллельные образующим двух поверхностей:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

490. Найти центр поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y + 2z = 0$. Преобразовать уравнение, перенеся начало координат в центр.

491. То же для поверхности: $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$.

492. То же для поверхности: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

493. Составить общее ур-ние поверхностей, имеющих центр в точке M (x_c, y_c, z_c).

494. Найти геом. место центров поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by - 2cz = 0$ (p и q переменные).

495. Найти уравн. прямых, проходящих через центр поверхности $x^2 + 4y^2 - 40z^2 + 4x - 8y - 16z - 12 = 0$ и пересекающих ее в двух точках, удаленных в бесконечность.

496. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, сопряженную с прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$.

497. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, параллельную плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

498. Найти ур-ние диаметральной плоскости поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, проходящей через точки O (0, 0)0, и M (1, 1, 0), и ур-ния хорд, с которыми она сопряжена.

499. Найти ур-ние диаметральной плоскости поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$, проходящей через точки O (1, 0, 0) и M (1, 1, 1) и ур-ния хорд, с которыми она сопряжена.

500. Найти диаметральную плоскость поверхности $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0$, проходящую через начало координат.

501. Найти ур-ние диаметра поверхности $4x^2+6y^2+4z^2+4xz+8y-4z+3=0$, перпендикулярного к плоскости XOZ.

502. Найти геом. место середин хорд поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, проходящих через точку $M\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$.

503. Плоскость $x=0$ есть диаметральная плоскость поверхности $xy=z$. Найти хорды, с которыми она сопряжена.

504 Зная, что плоскость $x-1=0$ диаметральная плоскость поверхности $x^2+y^2+z^2+2yz-2x+y+1=0$, найти ур-ния хорд, с которыми она сопряжена.

505. Найти диаметральную плоскость, общую поверхностям: $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$ и $x^2+4z^2-4xz+x-y+z=0$.

506. Найти ур-ние диаметра поверхности $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0$, соответствующего плоскости $x+y+z-1=0$.

507. Зная, что прямая $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$—один из диаметров поверхности $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0$, найти ур-ния плоскостей, ему соответствующих.

508. Найти геом. место центров сечений, происшедших от пересечения данного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостями, проходящими через данную точку $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$.

509. Найти точки пересечения поверхности $2x^2+3y^2+2z^2+2xz-4y-2z=0$ с г. м. центров ее круговых сечений.

510. Найти ур-ния плоскостей, пересекающих по кругам поверхность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}=k>0$.

511. Через точку $M\ (-1,-1,-1)$ провести плоскости, пересекающие поверхность $x^2+y^2+z^2-2xy+x+2y+2z=0$ по кругам.

512. Найти геом. место центров круговых сечений эллипсоида $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.

513. Найти круговые сечения поверхности $2x^2+y^2+z^2+xy-xz-2x=0$.

514. Найти уравн. круговых сечений эллипсоида $x^2+3y^2+12z^2-2x-12y-72z+109=0$, проходящих через точку $(0,-1,\ 3)$.

515. Найти круговые сечения поверхности $z^2+6xy=1$.

516. В уравнении $x^2+y^2+hz^2+2axz+2byz+z=0$ подобрать h так, чтобы оно представляло параболоид и найти общий вид плоскостей круговых сечений этого параболоида.

517. Найти уравнение поверхности цилиндра, имеющего взаимно перпендикулярные плоскости круговых сечений и проходящего через круг $x^2+y^2=1,\ z=0$ и точку $(0,\ 1,\ 1)$.

518. Найти геометрическое место центров сфер радиуса R, пересекающих эллипсоид $x^2+2y^2+3z^2=1$ по кругам.

519. Найти уравнения прямых, по которым поверхность конуса вращения $xy+xz+yz=0$ пересекается с плоскостью, проходящей через ось и прямую $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

520. Найти ур-ние однополого гиперболоида, у которого непересекающиеся прямые $\left.\begin{matrix}2x+y-z-1=0\\2x-y+z-1=0,\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}2x-z=0\\1+y=0,\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}2x+z=0\\1-y=0\end{matrix}\right\}$ суть три образующие одной системы.

521. Найти ур-ние гиперболического параболоида, у которого непересекающиеся и параллельные одной и той же плоскости прямые $\left.\begin{matrix}x-y-z=0\\y-z-1=0'\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}x+y+z=0\\y-z+1=0,\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}2x+y+z=0\\2y-2z+1=0\end{matrix}\right\}$ суть образующие одной и той же системы.

522. Найти общий вид прямолинейных образующих поверхности $x^2+3y^2-3z^2-2xy-2xz-2yz-6=0$.

523. Найти прямолинейные образующие поверхности $xy-xz+x+y+1=0$.

524. Найти прямолинейные образующие поверхности $y^2-2xy-4xz-2yz-4x+2y-1=0$.

525. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$, проходящие через точку $M(-1,-1,1)$ на поверхности.

526. Найти ур-ния прямолинейных образующих поверхности $4y^2-z^2+x-8y-8z-2=0$, пересекающих ось $0Y$.

527. На поверхности $9y^2-4z^2=x$ найти точки, в которых прямолинейные образующие взаимно перпендикулярны.

528. Составить уравн. плоскости, заключающей прямолинейные образующие поверхности $4x^2-y^2+x-3y+2z-1=0$ в точке M (1, 2, 3).

529. Найти длины осей эллипса, получаемого от сечения эллипсоида $x^2+y^2+4z^2-1=0$ плоскостью $x+y+z=0$.

530. Найти длины осей эллипса, получаемого от сечения параболоида $2y^2+z^2-2x=0$ плоскостью $x=y$.

531. Найти уравн. диаметра поверхности $3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+2x-6y-2z=0$, сопряженного с диаметральною плоскостью, перпендикулярною к прямой $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$.

532. Найти геом. место центров кривых, получаемых от пересечения поверхности $2x^2+y^2-z^2-2xy-x+z-1=0$ плоскостями, перпендикулярными к оси Z.

Упрощение ур-ний поверхностей 2-го порядка.

533. Найти плоскость симметрии поверхности $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz-x+4y-z+2=0$.

Упростить ур-ния поверхностей, составить формулы для преобразования координатных осей и т. д.

534. $2x^2+2y^2-z^2-4y+3=0$.

535. $3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+2x-6y-2z+3=0$.

536. $3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+2x-6y-2z=0$.

537. $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z-3=0$.

538. $6x^2+6y^2+6z^2+4x-8y-8z+5=0$.

539. $2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0$.

540. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-2z=0$.

541. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 4x - 2y + 2 = 0$.

542. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 4 = 0$.

543. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0$

544. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

545. $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$.

546. $x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x - 2y + 4z = 0$.

547. $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6xy - 3x - y - 4z + 1 = 0$.

548. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$.

549. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 3x - y - 2z = 0$

550. $x^2 - yz + 1 = 0$.

551. $x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xz + 2yz = 0$.

552. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

553. Составить уравн. г. м. вершин поверхностей $4y^2 - 2z^2 + x + 2Hy + 2Jz = 0$.

554. Найти уравн. прямой, проходящей через вершину поверхности $5x^2 + 5z^2 + 2x - 4y - 10z = 0$ и отсекающей от OX отрезок, равный —2.

555. Уравн. поверхности $xy + xz - zy - x = 0$ отнести к осям симметрии.

Упростить ур-ния поверхностей:

556. $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 2y - 1 = 0$.

557. $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$.

558. $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy - 12xz - 12yz + 84 = 0$.

Указание: $\lambda_1 = -7$; $\lambda_2 = -14$; $\lambda_3 = 21$.

559. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + x + y - 2z = 0$.

560. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 10x + 2y - 2z - 4 = 0$.

561. $x^2 - y^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 1$.

562. Определить λ и μ так, чтобы уравнение $x^2 + y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 - 1 = 0$ представляло цилиндр вращения.

563. Доказать что все поверхности $y^2 + (z^2 - 2z)(1 - \lambda^2) - 2\lambda xz - 2x = 0$ — поверхности вращения, и определить положение оси вращения.

564. Определить λ так, чтобы конус $x^2 - 2xy + \lambda^2 z = 0$ был конусом вращения, и определить уравнения оси вращения.

565. Исследовать характер поверхности $x^2 + (2m + 1)(y^2 + z^2) - 2xy - 2xz - 2yz = 2m^2 - 3m + 1$ при изменении m от $-\infty$ до $+\infty$.

566. При каком соотношении между параметрами λ и μ уравнение $x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xz + 2\mu yz - 2x - 4y - 2z = 0$ представляет конические поверхности?

567. Доказать, что конус с вершиной в точке (1, 0, 0) и направляющей $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$, $z = 1$ есть конус вращения, и определить ось вращения.

568. Найти уравнения осей симметрии и взять их за координатные оси для поверхности $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ так, чтобы одна из осей симметрии была перпендикулярна к оси OZ.

569. Составить и упростить уравнение поверхности, представляющей из себя выражение момента Z в переменном сечении mn балки AB пролетом a, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной грузом P в переменном расстоянии y от опоры A. Рассмотреть случаи 1) $y > x$, 2) $y < x$ и 3) $y = x$.

Указание. Моментом в сечении mn называется произведение из опорного сопротивления A на расстояние x до mn, т.-е. $Z = Ax$.

570. Поверхность 2-го порядка имеет плоскости симметрии: $x + y + z = 0$, $2x - y - z = 0$, $y - z + 1 = 0$ и проходит через точки (0, 0, 0), (1, 1, —1), (0, 0, 1). Найти ее уравнение.

571. Найти ур-ние поверхности 2-го порядка, для которой плоскости $x = 0$, $y = 0$ плоскости симметрии и которая проходит через точки (0, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 2) и (2, 0, 2).

572. Найти ур-ние поверхности вращения 2-го порядка, ось которой $x = 0$, $y = 0$ и которая проходит через точки (1, 0, 0), (1, 1, 1) и (0, 1, 2).

ОТДЕЛ II.

Дифференциальное исчисление.

Теория пределов.

1. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n^3+n+1}{(n-1)^3}$

2. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$

3. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$

4. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$

5. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$

6. $\lim\limits_{n=\infty} \left\{\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\}$

7. $\lim\limits_{n=\infty} \left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right\}$

8. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$, $a>0$

9. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $a>0$

10. $\lim\limits_{x=1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

11. $\lim\limits_{x=1} \left\{\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right\}$

12. $\lim\limits_{x=2} \left\{\frac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)}-\frac{2}{x-2}\right\}$

13. $\lim\limits_{x=1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n целые числа)

14. $\lim\limits_{x=1} \frac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x^{\frac{r}{s}}-1}$ (см. № 13)

15. $\lim\limits_{x=-1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ (см. № 14)

16. $\lim\limits_{x=1} \frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$

17. $\lim\limits_{x=1} \left\{\frac{\alpha}{1-x^\alpha}-\frac{\beta}{1-x^\beta}\right\}$. Числа α и β целые >0.

18. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$

19. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

20. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$

21. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

22. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

23. $\lim\limits_{x=0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

24. $\lim\limits_{x=2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$

25. $\lim\limits_{x=-1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

26. $\lim\limits_{x=\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

27. $\lim\limits_{x=+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

28. $\lim\limits_{x=\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

29. $\lim\limits_{x=+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

30. $\lim\limits_{x=\pm\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$

31. $\lim\limits_{x=+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

32. $\lim\limits_{x=\pm\infty}\left\{(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right\}$

33. $\lim\limits_{x=\pm\infty}\left\{x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right\}$

34. $\lim\limits_{x=+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left\{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right\}$

35. $\lim\limits_{x=+\infty}\left\{\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)}-x\right\}$

36. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sqrt[k]{a+x}-\sqrt[k]{a-x}}{x}$

37. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^m-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^m}{x}$

38. $\lim\limits_{x=a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b>0)$

39. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ $(a>0)$

40. Определить λ и μ под условием: $\lim\limits_{x=\infty}\left\{\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right\}=0$

41. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

42. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin 5x}{tg\, x}$

43. $\lim\limits_{x=\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m и n цел. числа)

44. $\lim\limits_{n=\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$

45. $\lim\limits_{x=0}x\cot x$

46. $\lim\limits_{x=1}(1-x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{2}$

47. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$

48. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

49. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{tg\, x-\sin x}{x^3}$

50. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$

51. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$

52. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

53. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

54. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$

55. $\lim\limits_{x=+\infty}(\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x-1})$

56. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1-tg\,x}}{\sin x}$

57. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{x^2}$

58. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$

59. $\lim\limits_{x=\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{3x}$

60. $\lim\limits_{x=\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$

61. $\lim\limits_{x=\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{4x^2-x+1}\right)^{\frac{x^4+1}{x^3-1}}$

62. $\lim\limits_{x=\infty}\left(\dfrac{3x^3-x+1}{2x^3+x+1}\right)^{\frac{1-2x^4}{1+x^3}}$

63. $\lim\limits_{x=\infty}\left(\dfrac{2x^3-x+1}{3x^3+x-1}\right)^{\frac{2x^3-1}{x^3+1}}$

64. $\lim\limits_{n=\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}},\ a>0$

65. $\lim\limits_{n=\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

66. $\lim\limits_{x=0}(1+tg\,px)^{\cot qx}$

67. $\lim\limits_{x=0}(1+3\,tg^2x)^{\cot x}$

68. $\lim\limits_{x=0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

69. $\lim\limits_{m=\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$

70. $\lim\limits_{m=\infty}\left(\cos\dfrac{x}{\sqrt{m}}\right)^m$

71. $\lim\limits_{m=\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}+\lambda\sin\dfrac{x}{m}\right)^m$

72. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 2x}$

73. $\lim\limits_{m=\infty}\left(\dfrac{\sin\left(a+\frac{b}{m}\right)}{\sin a}\right)^m$

74. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$

75. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{a^x-b^x}{x};\ a>0,\ b>0$

76. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

77. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$

78. $\lim\,(1+\log(1-\alpha x))^{\frac{1}{x}}$

79. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\log\cos\alpha x}{\log\cos\beta x}$

80. $\lim\limits_{n=\infty}n^2\log\cos\dfrac{\pi}{n}$

81. $\lim\limits_{n=\infty}n\log tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{n}\right)$

82. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}}\dfrac{\log tg\,x}{1-\cot x}$

83. $\lim\limits_{x=+\infty}\dfrac{\log(1+e^x)}{x}$

84. $\lim\limits_{n=\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)$

85. $\lim\limits_{n=\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$

86. $\lim\limits_{n=\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$

87. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{x^2}$

88. Пусть $P_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

Указание. Воспользоваться неравенствами: $\frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$.

89. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$, где $P_n = \sin\frac{a}{(2n+1)^2} + \sin\frac{3a}{(2n+1)^2} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)a}{(2n+1)^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенством: $x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}$, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

90. Пусть $P_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})$. Предполагая $|x| < 1$, найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

91. Последовательность чисел $x_0, x_1, \ldots$ задается по следующему закону: числа x_0 и x_1 даны; каждое следующее определяется через два предыдущие равенством $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ $(n \geq 2)$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} x_n$.

92. Две последовательности $a_0, a_1, a_2 \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$, первые члены которых даны, задаются следующим законом образования: $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{a_n + b_{n-1}}{2}$. Выразить a_n и b_n явно через n и найти $\lim\limits_{n=\infty} a_n$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n$.

93. Начальные члены двух последовательностей $a_0, a_1, a_2, \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, \ldots$ a_0 и b_0 даны, при чем $a_0 > b_0 > 0$. Остальные члены определяются по следующему закону: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Выразить a_n и b_n явно через n и найти $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n=\infty} b_n$.

94. Последовательность значений переменного x_n задается следующим образом: $x_0 = \sqrt{a}$, $x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$ и т. д. $(a > 0)$. Доказать, что переменное x_n возрастает, но остается постоянно меньше одного и того же числа. Определить $\lim\limits_{n=\infty} x_n$.

95. Две последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$, первые члены которых a_0 и b_0 — данные положительные числа, задаются следующим законом образования: $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}}$. Доказать, что переменные a_n и b_n приближаются к общему пределу (*Gauss*).

96. Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$, где x_0 произвольное число, задается следующим законом образования: $x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$, где m и ε $(0 < \varepsilon < 1)$ заданные числа. Доказать, что переменное x_n сходящееся и

что предел его $\xi=\lim\limits_{n=\infty} x_n$ служит единственным корнем уравнения $\xi = m + \varepsilon \sin\xi$. В предположении $x_0 = m$ доказать неравенство $|x_n - \xi| < \varepsilon^{n+1}$.

97. Последовательность значений переменного x_n задается следующим образом: $x_1=\frac{x_0}{2+x_0}$, $x_2=\frac{x_1}{2+x_1}$, $\ldots x_n=\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$, $\ldots$, число же x_0 произвольное >0. Доказать, что переменное x_n сходящееся и найти $\lim\limits_{n=\infty} x_n$.

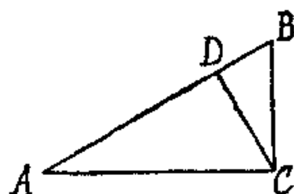
98. Последовательность значений переменного x_n задается следующим образом: $x_1=\frac{1}{2}e^{-x_0}$, $x_2=\frac{1}{2}e^{-x_1}$, $\ldots x_n=\frac{1}{2}e^{-x_{n-1}}$, $\ldots$ Число x_0 произвольное. Доказать, что x_n сходящееся переменное и что $\xi=\lim\limits_{n=\infty} x_n$ служит единственным корнем уравнения $2\xi=e^{-\xi}$.

Введение в дифференциальное исчисление.

99. Предполагая α бесконечно малой первого порядка, определить порядок малости величин:

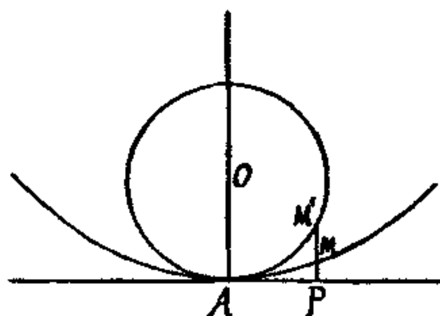
$$\sin\alpha^{2/3};\ \sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha;\ \cos\alpha-\cos 2\alpha;\ \log(1+\alpha+\alpha^2);\ e^{\alpha^2}-\cos\alpha;$$
$$\sin(x+2\alpha)-2\sin(x+\alpha)+\sin x;\ \sqrt{1+2\alpha}-1-\sqrt{\alpha}.$$

100. В прямоугольном треугольнике ABC угол A предполагается бесконечно малой величиной первого порядка, равно как и катет AC. Определить порядки частей AD и BD гипотенузы, если CD — высота из вершины прямого угла (черт. 19).



Черт 19.

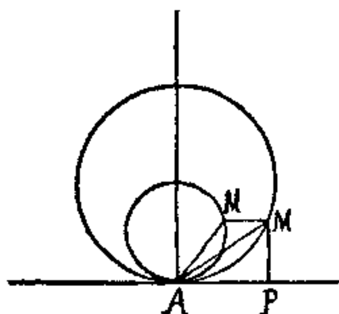
101. Парабола $y=\frac{x^2}{2p}$ касается прямой AP в точке A. Требуется найти радиус круга, касающегося прямой AP в той же точке, так чтобы расстояние точек M и M' параболы и круга, соответствующих одной и той же абсциссе $x=AP$, было бесконечно малой 3-го порядка по отношению к x (черт. 20).



Черт 20

102. Кривая $C'MC$ касается прямой PMQ в точке M. Определить, какого порядка малости будет расстояние NR точки кривой N от касательной, если хорда MN предполагается бесконечно малой первого порядка.

103. Круги радиусов R и R' касаются прямой AP в точке A и



Черт. 21.

расположены по одну сторону от AP. Прямая, параллельная AP, пересекает круги в точках M и M'. Определить порядок бесконечно малой MM', принимая угол MAM' за бесконечно малую первого порядка (черт. 21).

104. Будет ли функция, заданная так: $y=2x$ при $0 \leqq x < 1$ и $y=3-x$ при $1 \leqq x \leqq 2$,—непрерывна в промежутке $0 \leqq x \leqq 2$? Составить график этой функции.

105. Функция $\varphi(x)$ задана так: $\varphi(x) = 2x-1$ при $x \leqq 1$ и $\varphi(x)=6-5x$ при $x>1$. Найти корни уравнения $\varphi(x)=3x-3$.

106. Функция $\varphi(x)$ задана так: $\varphi(x) = 4x-7$ при $x \leqq \frac{8}{3}$ и $\varphi(x)=x+1$ при $x > \frac{8}{3}$. Найти корни уравнения $\varphi(x)^2 = 4x+1$.

107. При каких x функция $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ терпит разрыв непрерывности?

108. Обозначая через Ea целую часть числа a, определить, при каких x терпит разрыв непрерывности функция, заданная так: $y=\sqrt{x}-E\sqrt{x}$ при $x \geqq 0$.

109. При каком a функция, заданная так:

$$y = x\, log\,(x^2), \text{ если } x \text{ не} = 0$$
$$y = a \qquad , \text{ если } x = 0,$$

непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$?

110. В каких промежутках можно рассматривать функции y, z, u, определяемые выражениями: $y=\sqrt{x^2-1}$, $z = log(x^2-1)$, $u = log(x+1) + log\,(x-1)$?

111. В каком промежутке можно рассматривать функцию $y = log\,(x^2-3x+2)$?

112. В каком промежутке можно рассматривать функцию $y = arc\,cos\,\frac{3}{x}$?

113. В каком промежутке можно рассматривать функцию $y = arc\,sin\,\frac{2x}{1+x^2}$?

114. В каком промежутке можно рассматривать функции y и z, заданные так:

$$y = x\,log\,x,\ z=\frac{1}{2}\,x\,log\,(x^2), \text{ если } x \text{ не} = 0$$
$$y = 0 \qquad ,\ z = 0, \text{ если } x = 0?$$

115. Доказать, что

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ при } x>0 \text{ и } -\frac{\pi}{2} \text{ при } x<0.$$

116. Доказать равенство

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = arc\,tg\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \text{ где}$$

$\varepsilon = 0$, если $xy < 1$
$\varepsilon = -1$, если $xy > 1$ и $x < 0$
$\varepsilon = +1$, если $xy > 1$ и $x > 0$.

117. Доказать равенство

$$arc\,sin\,x + arc\,sin\,y = \eta\,arc\,sin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi, \text{ где}$$

$\eta = 1$, $\varepsilon = 0$, если $xy < 0$ или $x^2 + y^2 \leqq 1$
$\eta = -1$, $\varepsilon = -1$, если $x^2 + y^2 > 1$ и $x < 0$, $y < 0$
$\eta = -1$, $\varepsilon = +1$, если $x^2 + y^2 > 1$ и $x > 0$, $y > 0$

118. Проверить, что $2arc\,tg10 + arc\,sin\frac{20}{101} = \pi$.

119. Проверить равенство $2arc\,tgx + arc\,sin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$ при $x > 1$.

120. Проверить равенство: $arc\,cos\,x + arc\,cos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$ при $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$.

Проследить за изменением функций и построить их графики:

121. $y = arc\,sin(sin\,x)$.

122. $y = arc\,cos(cos\,x)$.

123. $y = arc\,tg(tg\,x)$.

124. $y = \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi}\,arc\,tg\left(tg\frac{2x-1}{2}\pi\right)$, если x не равно целому числу, и $y = x$, если x целое число; $0 \leqq x < \infty$.

125. Доказать, что $arc\,sin\left(\frac{sin\,x + cos\,x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4} - x$, если $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$.

126. Доказать, что сумма $arc\,sin\,x + 3\,arc\,cos\,x + arc\,sin\,(2x\sqrt{1-x^2})$ не зависит от x, если $x^2 < \frac{1}{2}$.

Определить, при каких x претерпевают разрыв непрерывности функции:

127. $y = \frac{tg^3 x + tg\,x}{2\,tg^3 x + 1}$.

128. $y = \frac{sin\,x}{x} + \frac{x}{sin\,x}$.

126. $y = \frac{tg\,4x}{tg\,x}$.

130. $y = \frac{tg\,3x}{tg\,2x}$.

131. $y = \frac{(x-1)^2\,tg^2\frac{\pi x}{2}}{x^3 - 3x + 2}$.

132. $y = log\,log\,x$.

133. Вычислить $\sqrt{e}$ с точн. до $\frac{1}{1000}$.

134. Вычислить число $e^{\sqrt{2}}$ с точн. до $\frac{1}{100}$.

Доказать неравенства:

135. $(y-x)\,cos\,y < sin\,y - sin\,x < (y-x)\,cos\,x$; $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

136. $\frac{y-x}{cos^2 x} < tg\,y - tg\,x < \frac{y-x}{cos^2 y}$; $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

137. $\frac{y-x}{1+y^2} < arc\,tg y - arc\,tg x < \frac{y-x}{1+x^2}$; $y > x$.

138. $\frac{y-x}{y} < \log y - \log x < \frac{y-x}{x}$; $y > x > 0$.

Дифференцирование функций одной переменной.

Найти производные функций:

139. $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$.

140. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$.

141. $y = (x-1)(x-2)$.

142. $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

143. $\frac{3x-1}{x^2}$.

144. $y = \frac{3a^2}{x^2} - \frac{a}{3x^4}$.

145. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

146. $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

147. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

148. $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$.

149. $y = \frac{(x+a)(x+b)}{x^n}$.

150. $y = \sqrt[4]{(x-1)^3}$.

151. $y = \sqrt{(x-a)(x+b)}$.

152. $y = x\sqrt{x^2+1}$.

153. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

154. $y = \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{\sqrt{1-x+x^2}}$.

155. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

156. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$.

157. $y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$.

158. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

159. $y = e^{x^2}$.

160. $y = e^{ax^2+bx}$.

161. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

162. $y = e^{-x^2}(a+bx)$.

163. $y = 2^x(x-1)$.

164. $y = \frac{x}{2^{x^2}}$.

165. $y = \sin mx$.

166. $y = \sin^2 x$.

167. $y = \sin(x^2)$.

168. $y = (\sin 5x)^3$

169. $y = a\sin\frac{b}{x}$.

170. $y = \cos ax \cdot \sin bx$.

171. $y = (x\,tg\,x)^2$.

172. $y = \frac{x}{\sin x}$.

173. $y = \frac{tg x}{x}$.

174. $y = e^x \sin x \cos^2 x$.

175. $y = a^{\sin^2 x}$.

176. $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$.

177. $y = \log(a+bx)$.

178. $y = \log\log x$.

179. $y = \log(x^3+2x^2)$.

180. $y = x\log x - x$.

181. $y = \log(x+\sqrt{x^2+1})$.

182. $y = \log(1+\sqrt{1-x})$.

183. $y = \log \sin(ax^2 + bx + c)$.

184. $y = \frac{\log x}{x^n}$.

185. $y = \log tg(ax + b)$.

186. $y = \cos(\log x)$.

187. $y = \log \frac{x+2}{x-3}$.

188. $y = \log \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

189. $y = \log \frac{x^4 - 3}{x^4 + 2}$.

190. $y = \log(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$.

191. $y = \frac{x^4}{4}\left[(\log x)^2 - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{8}\right]$.

192. $y = \log \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

193. $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log tg\frac{x}{2}$.

194. $y = \frac{1}{2}tg^2 x + \log\cos x$.

195. $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\log tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

196. $y = -\frac{2}{3}\cot x - \frac{\cos x}{3\sin^3 x} + \log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

197. $y = (arc \sin x)^2$.

198. $y = arc \sin \frac{1}{x}$.

199. $y = arc \sin(\sin x)$.

200. $y = arc \cos \frac{1}{x}$.

201. $y = arc \sin \sqrt{1-x^2}$.

202. $y = arc\ tg \frac{x+1}{x-1}$.

203. $y = arc\ tg \frac{3x+1}{\sqrt{2}}$.

204. $y = arc \cot \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}$.

205. $y = arc \cos(3x - 4x^3)$.

206. $y = arc \sin \frac{5x}{2\sqrt{3+4x^2}}$.

207. $y = arc \sin \frac{2x}{1+x^2}$.

208. $y = arc \sin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

209. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} arc\ tg \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

210. $y = \frac{1}{\sqrt{ab}} arc\ tg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\ tg\ x\right)$.

211. $y = \frac{1}{2}tg x + \frac{1}{2\sqrt{2}} arc\ tg(\sqrt{2}\ tg x)$.

212. $y = x\ arc \sin x + \sqrt{1-x^2}$.

213. $y = arc \cos \frac{2x+1}{x\sqrt{8}}$.

214. $y = \frac{2}{3} arc\ tg\, x + \frac{1}{3} arc\ tg \frac{x}{1-x^2}$.

215. $y = \log\frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} + 1} - 2\, arc\ tg \sqrt[4]{x+1}$.

216. $y = x^x$.

217. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

218. $y = x^{x^x}$.

219. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

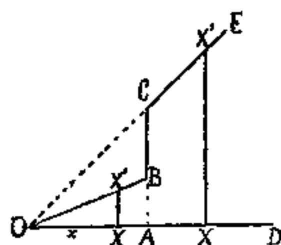
220. $y = x^{\sin x}$.

221. $y = (\sin x)^{\sin x}$.

222. $y = |x|$

223. $y = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, при x не $= 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

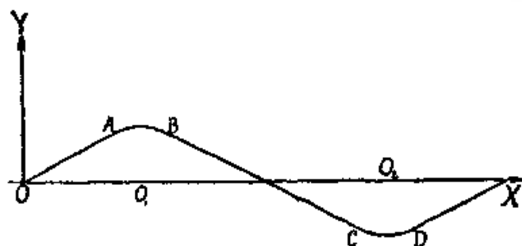
224. Функция y от x, заданная в промежутке $(0, \infty)$, есть площадь фигуры полученной от сечения фигуры $ECBOAD$ прямой XX', перпендикулярной к OD, расстояние которой от точки O равно x. Составить функцию y, проверить, что она непрерывна, найти ее производную и построить график $CA \perp OA$, $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$ (черт. 22).



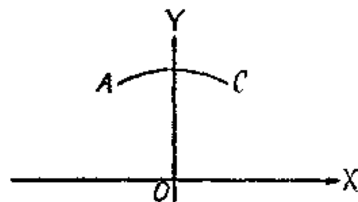
Черт. 22.

225. Кривая (черт. 23) $OABCDE$ — график функции. Дуги AB и CD — дуги в 60° окружностей радиуса a с центрами соответственно в O_1 и O_2. Прямые OA, BC и DX — касательные в концах дуг A, B, C и D. Хорды AB и CD параллельны OX. Прямая OA проходит через начало координат. Составить функцию и показать, что она имеет непрерывную производную.

226. Дуга AC — дуга в 60° окружности радиуса r с центром в начале координат, при чем хорда AC параллельна оси OX. Составить функцию, непрерывную вместе с своими первыми двумя производными в промежутке $(-\infty, \infty)$, график которой в промежутке $\left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ — дуга AC, в остальных параболы вида $y = a + bx + cx^2$ (с осью ||-ою OY) (черт. 24).



Черт. 23.



Черт. 24.

227. Зная, что $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$, найти выражения для сумм $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ и $1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Найти выражение производной от y по x в следующих примерах, где y и x выражены через вспомогательный параметр t:

228. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. **229.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

230. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$.

231. $x = k \sin t + \sin kt$, $y = k \cos t + \cos kt$.

232. $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$. **233.** $x = \frac{1 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4}$, $y = \frac{2t^2}{1 + 2t^2 + t^4}$.

234. $x = \arcsin t$, $y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}$.

235. $x = arc\,sin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = arc\,cos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Найти угловые коэффициенты касательных к кривым:

236. $x = t^2 - 3t + 4$, $y = t^2 - 4t + 4$ в точке $x = 2$, $y = 1$.

237. $x = cos\,t$, $y = sin\,t$ в точке $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

238. $x = t^4 - 2t^3 - t^2 + 4t - 2$, $y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t - 2$ в точке $x = 0$, $y = 0$.

Производные высших порядков.

Для функций, данных в нижеследующих задачах, найти производные указанного порядка:

239. $y = (3x^2 + 1)\left(\frac{1}{5}x^3 + x^2 - 3\right)(x - 1)^3$; найти $y^{(8)}$.

240. $y = \sqrt[5]{x^3}$; найти y'''.

241. $y = x^5\,log\,x$; найти y'''.

242. $y = a^{3x}$; найти y'''.

243. $y = \frac{a}{x^m}$; найти $y^{(4)}$.

244. $y = \frac{x^3}{x-1}$; найти y'''.

245. $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{(x-2)^2}$; найти y'''.

246. $y = x^2 e^{2x}$; найти $y^{(4)}$.

247. $y = x^2\,cos\,3x$; найти $y^{(4)}$.

248. $y = cos^2 x$; найти y'''.

249. $y = sin\,x\,cos^2 x$; найти $y^{(4)}$.

250. $y = x\,sin^2 x$; найти $y^{(4)}$.

251. $y = e^x\,sin\,x$; найти $y^{(4)}$.

252. Доказать, что функция $y = C\,cos\,2x + C'\,sin\,2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 0$.

253. Доказать, что функция $y = Ce^{-x} + C'e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$.

254. Доказать, что функция $y = e^{-x}\,cos\,x$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} + 4y = 0$.

255. Если $y = e^x\,sin\,x$ и $z = e^x\,cos\,x$, то $y'' = 2z$ и $z'' = -2y$.

Найти общее выражение производной n-го порядка для функций:

256. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

257. $y = \frac{x}{a+bx}$.

258. $y = \frac{ax+b}{x^2-a^2}$.

259. $y = \frac{4x+1}{x^2-3x+2}$.

260. $y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$.

261. $y = \frac{1}{x^2-a^2}$.

252. $y = \frac{x+1}{x(x-1)}$.

263. $y = \frac{x^4+1}{x^3-x}$.

264. $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$.

236. $y = log\,(ax + b)$.

266. $y = log\,\frac{ax+b}{ax-b}$.

267. $y = log\,(x^2 - 3x + 2)$.

268. $y = log\,\frac{x^3-1}{x^2-4x+4}$.

269. $y = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$.

270. $y=(ax+b)^{2a}$.
271. $y=\sin^2 x$.
272. $y=\cos^2 x$.
273. $y=\sin^3 x$.
274. $y=\sin 3x \sin^2 x$.
275. $y=\cos^2 x \sin^3 2x$.
276. $y=x^3 e^{mx}$.
277. $y=x^2 \sin ax$.
278. $y=e^{2x}\cos^2 x$.
279. $y=e^{ax}\cos bx$.
280. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.
281. $y=e^{ax}\sin^2(bx+c)$.
282. $y=(x^2+3x)\log x$.
283. $y=x^3\log x$.
284. $y=x^{n-1}\log x$.
285. $y=\frac{\log(1+x)}{1+x}$.

236. $y=\frac{f(x)}{x-a}$, где x целая функция степени $\leq n$.

287. Доказать, что каждая из функций: $\sin(n\arcsin x)$, $\sin(n\arccos x)$, $\cos(n\arcsin x)$, $\cos(n\arccos x)$ удовлетворяет уравнению $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$.

Найти значения производных n-го порядка при $x=0$ для следующих функций:

288. $y=x^k e^{ax}$.
230. $y=\operatorname{arc\,tg} x$.
290. $y=\arcsin x$.
291. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
292. $y=(\arcsin x)^2$.
293. $y=\sin(m\arcsin x)$.
294. $y=e^{m\arccos x}$.
295. $y=\log(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

296. Положим $\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}=e^{-x^2}p_n(x)$; доказать, что:

1) $p_{n+1}(x)+2xp_n(x)+2np_{n-1}(x)=0$;

2) $p_n(x)-p'_{n-1}(x)+2xp_{n-1}(x)=0$;

3) $p''_n(x)-2xp'_n(x)+2np_n(x)=0$.

На основании последнего соотношения найти полином $p_n(x)$.

297. Положим $P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$; доказать, что:

1) $(x^2-1)P''_n(x)+2xP'_n(x)-n(n+1)P_n(x)=0$,

2) $P_{n+1}(x)-(4n-2)xP_n(x)+4n^2P_{n-1}(x)=0$.

298. Показать, что производные от полинома

$$P_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n$$

удовлетворяют соотношению

$$(x^2-1)\frac{d^{m+2}P_n(x)}{dx^{m+2}}+(2m+1)x\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}+(m^2-n^2)\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=0.$$

Дифференцирование функций нескольких переменных.

Найти частные производные и полные дифференциалы функций:

299. $u=x^3+y^3-3xy$.
300. $u=2x^3-3y^2x^2+3y^3$.
301. $u=\frac{x-y}{x+y}$.
302. $u=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.
303. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.
304. $u=y\sin x+x\sin y$.
305. $u=\log(x^2+y^2)$.
306. $u=\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

367. $u = arc\,tg\,\frac{x}{y}$.

308. $u = y^x$.

308. $u = x^{\sin y}$.

310. $u = arc\sin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

311. $u = \log tg\,\frac{x}{y}$.

312. $u = xy + xz + yz$.

313. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$.

314 $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

315. $u = \log(x + y + z)$.

316. $u = \frac{xy}{ax + bz}$.

317. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

318. $u = (xy)^z$.

319. $u = z^{xy}$.

320. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

321. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Проверить теорему Эйлера об однородных функциях на примерах:

322. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \log\frac{x}{y}$.

328. $u = \frac{y}{x}e^{\frac{x}{z}}$.

324. $u = \sin\frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

325. $u = arc\sin\frac{x - \sqrt{y^2 + z^2}}{x + \sqrt{y^2 + z^2}}$.

Найти:

326. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \log(x^2 + y^2)$.

327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = arc\,tg\,\frac{x + y}{1 - xy}$.

328. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ если $u = \arccos(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2})$.

329. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = x^y$.

330. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \sin^2(ax + by)$.

331. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \log(x + y)$.

332. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, если $u = \log(x^2 + y^2)$.

333. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

334. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, если $u = e^{xyz}$.

Найти:

335. $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ при $x = 0$, $y = 0$, если $u = y^5 - 3yx + arc\sin\frac{\sqrt{1 - x^2}\,y}{1 - \sqrt{1 + x^2}} + xy^2$.

336. $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$ при $x = 0$, $y = 1$, если $u = y^4 \cos x + x^2\, arc\,tg\,\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Найти:

337. d^2u, если $u = e^{xy}$.

338. d^2u, если $u = log(x^2 + y^2)$.

339. d^2u, если $u = sin(x + y + z)$.

340. d^4u, если $u = x^4 + 4x^3y + 2xy^2z - 3xyz^2 + z^4$.

341. d^4u, если $u = x^4 + 4x^3y + 2xy^2z - 3xyz^2 + z^4 + 2xy^2 - 3xyz + 5z^2 - 4x + 18$.

342. d^4u, если $u = x^4 + 3x^3y + z^4 - x^2y + z^3$.

343. d^3u, если $u = xyz$.

Найти частные производные и полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков для функций:

344. $u = \varphi(t)$, где $t = xy$.

345. $u = \varphi(t)$, где $t = x^2 + y^2$.

346. $u = \varphi(t)$, где $t = x^2 + y^2 + z^2$.

347. $u = \varphi(t)$, где $t = ax + by + cz$.

348. $u = \varphi(\xi, \eta)$, где $\xi = ax + by + cz$, $\eta = a'x + b'y + c'z$.

349. $u = \varphi(\xi, \eta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$.

350. $u = \varphi(\xi, \eta)$, где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

351. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$. Написать $d^n u$.

352. Полагая $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$, найти $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

353. Полагая $x = \rho cos^2\varphi$, $y = \rho sin^2\varphi$, найти $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

354. Полагая $x = \rho sin\varphi\, cos\psi$, $y = \rho sin\varphi\, sin\psi$, $z = \rho cos\varphi$, найти

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}.$$

355. Доказать, что однородные функции $\varphi(x, y)$ измерения n удовлетворяют соотношению $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi = n(n-1)\ldots(n-k+1)\varphi$

356 Проверить равенство $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = 0$, где $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

357. Проверить равенство $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$, где $u = log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

Проверить следующее соотношение.

358. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$.

359. Показать, что функция $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ удовлетворяет уравнению $$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

360. Доказать, что функция $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

361. Если $u = \log(x^2+y^2)$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

362. Если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

Дифференцирование неявных функций.

363. $y = 1 + xe^y$; найти y'. **363-bis.** $y^x = \frac{x+y}{x-y}$; найти y'.

364. $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; найти y'.

364-bis. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$; найти y'.

365. $x + \operatorname{arc\,tg} y - y = 0$; найти y' и y''.

365-bis. $x - y = a\sin y$; найти y' и y''

366. Функция y задана неявно уравнением $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Найти ее вторую и третью производные при $x = \frac{1}{2}$, если при $x = \frac{1}{2}$ значение функции $y = -\frac{1}{2}$.

367. Функция y задана неявно уравнением $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Найти ее третью производную при $x = 1$, если для $x = 1$ значение функции $y = 1$.

368. Уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ определяет y, как неявную функцию от x. Написать результат четырехкратного дифференцирования этого уравнения.

369. Функция y от переменной независимой x задана неявно уравнением $x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0$. Найти ее производную y' при $x = 0$.

370. Функция y переменной независимой x задана неявно уравнением $(x^2+y^2-bx)^2 = a^2(x^2+y^2)$. Найти значение производной y' для системы значений $x = 0$, $y = 0$.

371. Функции y и z заданы неявно системой уравнений $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$. Найти значения их производных первого и второго порядков при $x = 1$, если при $x = 1$ функции принимают значения $y = 1$, $z = 1$.

372. Функции y и z от переменной независимой x заданы неявно системой уравнений $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Найти их первые и вторые дифференциалы.

373. Функции x и y от переменной независимой z заданы неявно системой уравнений $x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$. Найти их производные первого и второго порядков при $x = 1$, если при $x = 1$ функции принимают значения $y = -1$, $z = 1$.

374. Функция z от x и y задана уравнением $e^z = \cos x \cos y$. найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

375. Функция z от двух переменных независимых задана неявно уравнением: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. При системе значений $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$ найти выражение для второго полного дифференциала.

376. Функция z от двух переменных независимых задана неявно уравнением $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2yz-2xz-72=0$. При $x=1$, $y=1$ принимаем $z=4$. Вычислить при этой системе значений $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

377. Функция z задана неявно уравнением $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

378. Функция z от двух независимых переменных x и y задана неявно уравнением $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$. Составить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

379. Функция z от двух независимых переменных x и y задана неявно уравнением: $xy+xz+yz=1$. Найти ее полные дифференциалы 1-го, 2-го и 3-го порядков.

380. Функции u и v от двух независимых переменных x и y заданы неявно системой двух уравнений: $xu+yv=1$, $x+y+u+v=0$. Найти их полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков.

381. Функции u и v заданы неявно уравнениями: $xu+yv=0$, $uv-xy=5$. При $x=1$ и $y=-1$ получаем $u=2$ и $v=2$ (вторые решения отбрасываем). При этой системе значений переменных вычислить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

382. Найти производные от x и y по z, если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=kt^2$.

383. Найти частные производные от z по x и по y, если $x=a\cos u \sin v$, $y=b\cos u \cos v$, $z=c\sin u$.

384. Показать, что функция z от x и y, заданная уравнениями $z=\alpha x+yf(\alpha)+\varphi(\alpha)$, $0=x+yf'(\alpha)+\varphi'(\alpha)$, где α вспомогательный параметр, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

Замена переменных.

385. Преобразовать уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$, взяв y за переменное независимое.

386. Преобразовать уравнение: $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$, взяв за независимое переменное y.

387. В уравнении: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ изменить независимое переменное, положив $x=\cos t$.

388. Преобразовать уравнение: $x^2y''+3xy'+y=0$, положив $x=e^t$.

389. Преобразовать уравнение: $(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\frac{dy}{dx}+by=0$, положив $t=\log(a+x)$.

390. Преобразовать уравнение: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$, приняв за новое независимое переменное $t=\log x$.

391. Преобразовать уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$, положив $x=2\sqrt{t}$.

392. Преобразовать уравнение: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$, положив $x = \cos t$.

393. Преобразовать уравнение: $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$, положив $x = tg\, t$.

394. Преобразовать уравнение: $(x - x^3)y'' + (1 - 3x^2)y' - xy = 0$, положив $x = \sqrt{1 - t^2}$.

395. Преобразовать уравнение: $xyy'' - xy'^2 + y^3 = 0$, положив $x = e^t$, $y = e^u$ и приняв t за независимое переменное, а u за его функцию.

396. Преобразовать уравнение: $2y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, положив $x - y = u$, $x + y = v$ и приняв v за независимое переменное, а u за его функцию.

397. Преобразовать уравнение: $y'' = \frac{A}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}y$, вводя новую неизвестную функцию $u = \frac{y}{x-\beta}$ и новое независимое переменное $t = log\frac{x-\alpha}{x-\beta}$.

398. Преобразовать выражение $\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}$, положив $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

399. Преобразовать выражение $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, положив $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

400. Преобразовать выражение $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, взяв y за независимое переменное, а x за его функцию.

401. Преобразовать уравнение $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, приняв за новые независимые переменные u и v, связанные с x и y уравнениями: $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

Преобразовать к новым независимым переменным r и θ, связанным с x и y равенствами: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, следующие выражения

402. $w = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$

402-bis. $w = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$

403. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

403-bis. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Преобразовать к новым независимым переменным u и v следующие уравнения:

404. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$; $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.

405. $(x + mz)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + nz)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $u = x$, $v = \frac{y + nz}{x + mz}$.

406. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = y - ax$, $v = y + ax$.

407. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$; $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую искомую функцию, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

408. $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$; $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

409. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$.

410. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z.$

411. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(a+b)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+ab\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ при помощи подстановки типа: $u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y$ в уравнение вида: $A\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0.$

412. Составить уравнение для нахождения тех решений уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, которые зависят только от r, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

413. Составить уравнение для нахождения тех решений уравнения $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$, которые зависят только от $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

414. Составить уравнение для нахождения тех решений уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, которые зависят только от r, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

415. Приняв за новые переменные независимые r, θ, φ, связанные с x, y, z равенствами: $x=r\sin\theta\sin\varphi$, $y=r\sin\theta\cos\varphi$, $z=r\cos\theta$, преобразовать выражения:

$$\Delta_1 v=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2,$$
$$\Delta_2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

416. Найти производную от Y по X, если $X=\frac{dy}{dx}$, $Y=x\frac{dy}{dx}-y$.

417. Найти частные производные от Z по X и Y, если X, Y, Z связаны с x, y и z, где z -функция от x и y, уравнениями: $X=x$, $Y=\frac{\partial z}{\partial y}$, $Z=z-\frac{\partial z}{\partial y}y$. (Преобразование Ампера.)

418. Найти частные производные первого и второго порядков от Z по X и Y если $X=p$, $Y=q$, $Z=px+qy-z$, где z функция от x и y, и $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. (Преобразование Лежандра.)

Ряды.

Разложить в ряд по возрастающим степеням x функции:

419. $y=\frac{1}{x-1}$.

420. $y=\frac{3-x}{1-x^2}$.

421. $y=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}$.

422. $y=(x+\operatorname{tg} x)\cos x$.

423. $y=\sin^2 x$.

424. $y=\cos^3 x$.

425. $y=\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x$.

426. $y=e^{ax}\sin bx$.

427. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

428. $y=e^{x\operatorname{ctg} a}\cos x$.

429. $y=\log(1-x+x^2)$.

430. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

431. $y=\log(x^2-3x+2)$.

432. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{a-x}{a+x}$.

433. $y=\operatorname{arc\,tg} x$.

434. $y=(1-x)e^x$.

435. $y=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

436. $y=\frac{\log(1+x)}{1+x}$.

437. $y=\frac{(1+x)^2}{x}\log(1+x)$.

438. $y=\sin[\mu \arcsin x]$.

439. $y=(\arcsin x)^2$.

Написать первые пять членов разложения в ряд по возрастающим степеням x функций

440. $\log(1+e^x)$.

441. $y=e^{\sin x}$.

442. $y=e^{\cos x}$.

444. $y=-\log\cos x$.

443. $y=(\cos x)^n$.

446. $y=e^x\sin x$.

445. $y=\log(1+x+x^2)$.

Написать первые четыре члена разложения в ряд по возрастающим степеням x функций:

447. $y=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$.

448. $y=\log(1+\sin x)$.

449. $y=\sqrt{1+4x+12x^2}$.

450. $y=e^{x\sec x}$

Написать первые шесть членов разложения в ряд функций:

451. $y=(1+x)^x$.

452. $y=e^x\log(1+x)$.

453. $y=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$.

454. Разложить в ряд по возрастающим степеням $x+1$ функцию x^4+1.

455. Разложить в ряд по возрастающим степеням $\frac{1-x}{1+x}$ функцию $y=\log x$.

456. Разложить в ряд по возрастающим степеням $\frac{x}{1+x}$ функцию $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию y, заданную уравнениями:

457. $y\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=a$.

Указание: найти разложение второй производной от y.

458. $y^3-3y+x=0$.

Разложить в ряд по возрастающим степеням x и y функции:

459. $\frac{1}{1-x-y+xy}$.

460. $\log(1-x)\log(1-y)$.

461. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$.

462. $\log\frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

463. Вычислить $x=\sqrt[3]{640}$ с точностью до 0,001.

464. Вычислить $x=\sqrt[5]{245}$ с точностью до 0,001.

455. Вычислить $x=\sqrt[7]{129}$ с точностью до 0,0001.

466. Вычислить $x=\sqrt[9]{515}$ с точностью до 0,0001.

407. Вычислить $x=\sin 1^\circ$ с точностью до 0,0001.

463. Вычислить $x=\cos 1^\circ$ с точностью до 0,001.

469. Вычислить $x=\sin 5^\circ 3' 14''$ с точностью до 0,00001.

470. Вычислить $x=\sin 10^\circ$ с точностью до 0,00001.

471. Вычислить $x=\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

472. Вычислить $x=\sin 18^\circ$ с точностью до 0,001.

473. Вычислить $x=\sin 36^\circ$ и $x=\cos 36^\circ$ с точностью до 0,0001.

474. Вычислить $\log 2$ с точностью до 0,001.

Раскрытие неопределенностей

(от № 475 до № 486 вкл. помощью рядов).

475. $\lim \frac{x + \log(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$ при $x = 0$.

476. $\lim \frac{\log^3(1+x) - x \sin^2 x}{(1-\cos^2 x)(1-e^{x^2})}$ при $x = 0$.

477. $\lim \frac{1 + x\log(1+x) - (1+x)^x}{x^4}$ при $x = 0$.

478. $\lim \left\{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\log\frac{2+x}{2-x}\right\}$ при $x = 0$.

479. $\lim \frac{\log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$ при $x = 0$.

480. $\lim \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ при $x = 0$; $a > 0$.

481. $\lim \left\{x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right\}$ при $x = \infty$.

482. $\lim \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$ при $x = 0$.

483. $\lim \left\{\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2x\pi}-1)}\right\}$ при $x = 0$.

484. $\lim \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$ при $x = 0$.

485. $\lim \left\{\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right\}$ при $x = 0$.

486. $\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ при $x = 0$.

Указание: $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots} = e \cdot e^{\varphi(x)}$.

487. $\lim \left\{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}\right\}$ при $x = 0$.

483. $\lim \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$ при $x = 0$.

489. $\lim \frac{(1+x)^m - (1-x)^m}{e^{1+x} - e^{1-x}}$ при $x = 0$.

490. $\lim \frac{e^{ax} - e^{2ax}}{\log(1+x)}$ при $x = 0$.

491. $\lim \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\arcsin(\operatorname{tg} x) - \frac{\pi}{2}}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

492. $\lim \frac{\log(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$ при $x = 0$.

493. $\lim \frac{x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$ при $x = 0$.

494. $\lim \frac{e^x - 1 + x^2 \sin\frac{\pi}{x}}{x}$ при $x = 0$.

495. $\lim \frac{1 - \cos(m \arcsin x)}{\log(1 - x^2)}$ при $x = 0$.

496. $\lim \frac{\sin 3x^2}{\log\cos(2x^2 - x)}$ при $x = 0$.

497. $\lim \frac{x^x - x}{x - 1 - \log x}$ при $x = 1$.

498. $\lim \frac{e^x - e^{-x}}{1 - x^4 - \log(e - x)}$ при $x = 0$.

499. $\lim \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$ при $x = 0$.

500. $\lim \frac{\log\sin 5x}{\operatorname{cotg}^2 x}$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

501. $\lim \frac{x^3 \sin x}{(\cos x - 1)^2}$ при $x = 0$.

502. $\lim \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ при $x = 0$.

503. $\lim \frac{\cos^n x}{tg^{na}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$ при $x=-\frac{\pi}{2}$; $a<1$.

504. $\lim \frac{\log[1-\cos(ax)]}{\log tg(bx)}$ при $x=0$. **505.** $\lim \frac{x^m}{e^x}$ при $x=\infty$.

506. $\lim \frac{\log tg(7x)}{\log tg(2x)}$ при $x=0$.

507. $\lim \frac{x^m}{a^{x^n}}$, где a, m и n положительны и $a>1$.

508. $\lim \frac{\log(x-1)-x}{tg\frac{\pi}{2x}}$ при $x=1$. **509.** $\lim \frac{\log tg(ax)}{\log tg(bx)}$ при $x=0$.

510. $\lim \frac{x}{x+\sin x}$ при $x=\infty$. **511.** $\lim x^m \log x$ при $x=0$; $m>0$.

512. $\lim \log x \log(1-x)$ при $x=1$. **513.** $\lim (1-x)\, tg\frac{\pi x}{2}$ при $x=1$.

514. $\lim tg\, 2x\, cotg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ при $x=\frac{\pi}{4}$.

515. $\lim arc\sin\frac{x-a}{a}\, cotg(x-a)$ при $x=a$.

516. $\lim \frac{x^2+1}{cotg\, x \log(1+x+x^2)}$ при $x=0$.

517. $\lim \left(\cos\frac{a}{x}\right)^x$ при $x=\infty$. **518.** $\lim \left(\cos\frac{a}{x}\right)^{x^2}$ при $x=\infty$.

519. $\lim x^{\frac{1}{1-x}}$ при $x=1$. **520.** $\lim tg\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)^{cotg\, x}$ при $x=0$.

521. $\lim (1+e^{-x})^{cotg\frac{1}{x}}$ при $x=\infty$. **522.** $\lim (1-2\sin^2 x)^{5\, cotg^2 x}$ при $x=0$

523. $\lim (\sin x)^{tg\, x}$ при $x=\frac{\pi}{2}$. **524.** $\lim (\log_a x)^{cotg(x-a)}$ при $x=a$.

525. $\lim \left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{tg\, x}$ при $x=\frac{\pi}{2}$. **526.** $\lim \left[\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right]^x$ при $x=\infty$.

527. $\lim \left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ при $x=0$. **528.** $\lim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ при $x=0$.

529. $\lim \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ при $x=0$. **530.** $\lim \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, 2x}$ при $x=0$.

531. $\lim (tg\, x)^{cotg\, x}$ при $x=\frac{\pi}{2}$. **532.** $\lim (tg\, x)^{\log(1+\cos x)}$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

533. $\lim x^x$ при $x=0$. **534** $\lim x^{x^n}$ при $x=0$ $(n>0)$.

535. $\lim (arc\sin x)^{tg\, x}$ при $x=0$. **536.** $\lim (1-2^x)^{\sin x}$ при $x=0$.

537. $\lim (\sin 3x)^{\log x}$ при $x=0$. **538.** $\lim x^{b-c\log x}$ при $x=0$

539. $\lim \left(\frac{\pi}{2}-arc\, tg\, x\right)^{\frac{1}{x}}$ при $x=\infty$.

540. $\lim (tg\, x)^{\frac{1}{\log\sin x}}$ при $x=0$.

541. $\lim \left[\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x^2+x-6}\right]$ при $x=2$.

542. $\lim (tg\, x-\sec x)$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

543. $\lim \left(x \, tg\, x - \frac{\pi}{2} \sec x\right)$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

544. $\lim \left[x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$ при $x = \infty$.

545. $\lim \left[\frac{\pi}{2} \, tg \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1-x}\right]$ при $x = 1$.

Возрастание и убывание функций.

Доказать неравенства:

546. $\frac{e^x}{x} > e$, если $x > 1$.

547. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

548. $tg\, x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

549. $x - \frac{x^3}{3} < arc\, tg\, x < x$ при $x > 0$.

550. $x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x) < x$ при $x > 0$.

551. $\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}$ при $0 < x < 1$.

552. $\frac{e}{2x+2} < e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \frac{e}{2x+1}$.

553. $\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geqq \frac{x+y}{2}$ при $x \geqq 0, y \geqq 0, p \geqq 1$. *Указание*: положить $\frac{y}{x} = z$.

554. $\frac{1}{3} \, tg\, x + \frac{2}{3} \sin x > x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Основные примеры на maxima и minima функций от одной переменной.

Найти max. и min. функций y, заданных явно:

555. $y = (x - 1)^4 (x + 2)^3$.

556. $y = x^x$.

557. $y = x^x$.

558. $y = a + (x - b)^4$.

559. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$.

560. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.

561. $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$.

562. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$.

563. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$.

564. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$.

565. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

566. $y = x^3 (x - 1)^2 (x - 2)^3 (x - 3)^4$.

567. $y = (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3)^3$.

568. $y = x (a + x)^2 (a - x)^3$.

569. $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

570. $y = \frac{(a - x)^3}{a - 2x}$.

571. $y = \frac{(x + 3)^3}{(x + 2)^2}$.

572 $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a - x}$.

573. $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$.

574. $y = (mx + na)^{m+n} - (m + n)^{m+n} x^m a^n$.

575. $y = (1 + x^3)(7 - x)^2$.

576. $y = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

577. $y = x^3 \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ при $-2 \leqq x \leqq 2$.

578. $y = \sqrt[3]{(x - 1)^2 (x + 1)}$ при $-2 \leqq x \leqq 2$.

579. $y = \log \frac{x+2}{x-3}$.

580. $y = x^2 e^{-x^2}$.

581. $y = \frac{x^2}{\log x}$.

582. $y = e^{-x} - e^{-2x}$.

583. $y = 2 \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leq x \leq +1$.

584. $y = a^2 + b^2 - 2ab \cos x$.

585. $y = e^x \operatorname{cosec} x$.

586. $y = \frac{1}{2} \log x - \operatorname{arctg} x$.

587. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$.

588. $y = \arcsin (\sin x)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

589. $y = e^x + e^{-x} - 2\cos x$.

590. $y = \frac{tg^3 x}{tg\, 3x}$.

Найти все maxima и minima и выяснить период функций:

591. $y = 2 \sin 2x + \sin 4x$.

592. $y = \sin x - 3 \sin \frac{x}{3}$.

593. $y = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3}$.

594. $y = \sin x \sin (a + x)$.

Найти max. и min. функций y, заданных неявно уравнениями:

595. $y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0$.

596. $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0$.

597. $xy(y-x) - 2a^3 = 0$.

598. $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

599. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

600. $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 1 = 0$.

601. $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 5 = 0$.

602. $3a^2y^2 + xy^3 + 4ax^3 = 0$.

603. $x^3 + y^3 - 3a^2x = 0$.

604. $x^3 - y^3 - 3axy = 0$ при $a > 0$.

605. $x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$.

606. $2x^5 - 3ay^4 - x^2y^3 = 0$.

Построение графиков функций.

Построить график функций:

607. $y = |x|$.

608. $y = x^3(x-1)^2$.

609. $y = (x-1)^2(x-2)$.

610. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

611. $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$.

612. $y = \frac{x-1}{x^2+3x-4}$.

613. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

614. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$.

615. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$.

616. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

617. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$.

618. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$.

619. $y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.

610. $y = \frac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$.

621. $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

622. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$.

623. $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+9}$.

624. $y = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2+1}$.

625. $y = x - \sqrt[3]{x^3+1}$.

626. $y = x\sqrt{x^2+1} - x^2$.

627. $y = x^{\frac{4}{3}} - (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$.

626. $y = 2x + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

629. $y = (x-1)^3\sqrt{x} - 2$.

630. $y = (x-1)^3 \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

631. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

632. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

633. $y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

634. $y = x^2 \sqrt{x^4 - 1}$.

635. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

636. $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

637. $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

638. $y = \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x+1}$

639. $y = \frac{x^2 - \sqrt{x^4+1}}{x}$.

640. $y = cos^2 x + cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

641. $y = cos^3 x + sin^3 x$.

642. $y = cos^4 x + sin^4 x$.

643. $y = 3\,sin^2 x - sin\,3x$.

644. $y = cos\,x + \frac{1}{2}\,cos\,2x + \frac{1}{3}\,cos\,3x$.

645. $y = sin\,x + \frac{1}{2}\,sin\,2x + \frac{1}{3}\,sin\,3x$.

646. $y = \frac{sin^2 x}{2 + sin\,x}$.

647. $y = \frac{cos\,2x}{cos\,x}$.

648. $y = \frac{tg\,3x}{tg\,x}$.

649. $y = sin\,x + \frac{1}{2\,sin\,x}$.

650. $y = arc\,sin\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

651. $y = arctg\,x - \frac{9x+7x^3}{(1+x^2)(9+x^2)}$.

652. $y = \frac{arc\,sin\,x}{2} - \sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$.

653. $y = tg\,x - x$.

654. $y = \frac{log\,x}{x^a}$ при $a > 0$.

655. $y = log\,(x^2 - 3x + 2)$.

656. $y = log\left(\frac{x^2-5x+6}{x-1}\right)$.

657. $y = log\,\frac{x-1}{x+2}$.

658. $y = x - log\,(1+x)$.

659. $y = \frac{x^2}{2} - log\,x$.

660. $y = \frac{x - sin\,x}{x^3}$ при $0 \leq x \leq \pi$.

Разные задачи на maxima и minima.

Определить число вещественных корней уравнений:

661. $12x^4 + 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$.

662. $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$.

663. $3x^4 - 4x^3 - ax^3 - 1 = 0$.

664. $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$.

665. $e^{-x} - x = 0$.

666. $\frac{log\,x}{x} - a = 0$.

667. $x\,log\,x - a = 0$.

668. $\left(\frac{5}{6}\right)^x + \frac{x}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} - \frac{1}{2} = 0$.

При каких значениях параметра k следующие уравнения имеют указанное в скобках число вещественных корней:

669. $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + k = 0$, (два различных корня).

670. $2x^3 - 13x^2 - 20x + k = 0$, (один корень).

671. $x^3 - 6x^2 + 9x + k = 0$, (один корень).

672. $3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + k = 0$, (четыре различных корня).

673. $2x^3 - 4x^2 - 30x + k = 0$, (два совпадающих корня).

674. $x^2 - x - log\,x - k = 0$, (ни одного корня).

675. $x^2 - 17x - 9\,log\,x - k = 0$, (два корня).

676. $x^2 + x + e^{-x} + k = 0$, (два совпадающих корня).

677. $6\, arctg\, x - x^3 + k = 0$, (три корня, из которых два совпадающих).

678. При каких значениях параметра k кривая, изображаемая уравнением $y = 2 \sin^2 x - x - k$, касается оси абсцисс в промежутке $0 < x < \pi$?

679. Указать границы, между которыми находятся вещественные корни уравнения $x \log x - 3 = 0$.

680. Определить a, b, c и d таким образом, чтобы функция $ax^3 + bx^2 + cx + d$ была maximum при $x = -1$ и minimum при $x = 2$ и обращалась в нуль при $x = -1$.

681. Доказать, что $x^\delta (\log x) < \frac{1}{\delta e}$, при $0 < x < 1$, $\delta > 0$.

682. Какому условию должно удовлетворять основание системы логарифмов, чтобы при этом основании были числа, равные своим логарифмам?

683. Из цилиндров, периметр осевого сечения которых равен k, какой имеет наибольший объем?

684. Из конусов, вписанных в шар радиуса R, какой имеет наибольший объем?

685. Из цилиндров, вписанных в шар радиуса R, какой имеет наибольший объем?

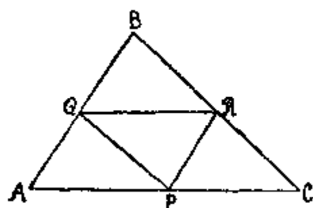
686. Около полушара радиуса R требуется описать конус наименьшего объема; основание конуса совпадает с основанием полушара.

687. По краям прямоугольной пластинки вырезаны четыре равные квадрата; остающаяся часть сложена в коробочку. Каковы должны быть вырезанные части, чтобы объем коробочки был наибольшим?

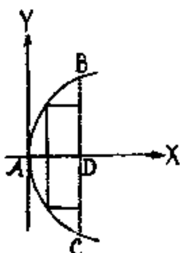
688. В треугольнике ABC на основании $AC = m$ дана точка P. Требуется провести $QR \parallel AC$ так, чтобы площадь тр-ка PQR была наибольшей (черт. 25).

689. В параболический сегмент $ABCD$ параболы $y^2 = 2px$, в котором хорда BC перпендикулярна к оси параболы AX, вписать прямоугольник наибольшей площади; $AD = a$ (черт. 26)

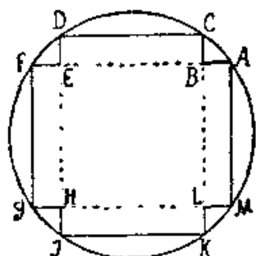
690. В данный круг вписать крестообразную фигуру $ABCDEFGHJKLM$ наибольшей площади; $AM = FG = CD = JK$ (черт. 27).



Черт. 25



Черт. 26



Черт. 27

691. Построить равнобочную трапецию, которая при данной площади S имела бы наименьший периметр; угол при основании трапеции $= \alpha$.

692. Описать около данного цилиндра прямой конус наименьшего объема, если плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают.

693. Вписать в данный конус цилиндр наибольшего объема, если плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают.

694. Вписать в данный конус цилиндр с наибольшей боковой поверхностью, если плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают.

695. Вписать в данный конус цилиндр так, чтобы вся его поверхность имела наибольшую величину, если плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают.

696. Вписать в данный шар радиуса R цилиндр наибольшего объема.

697. Вписать в данный шар радиуса R цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

698. Вписать в данный шар радиуса R цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

699. Вписать в данный шар радиуса R прямой конус наибольшего объема

700. Вписать в данный шар радиуса R прямой конус с наибольшей боковой поверхностью.

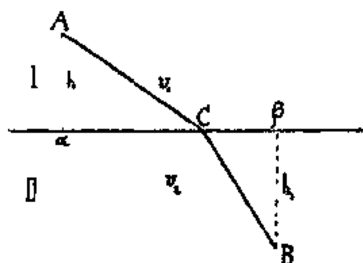
701. Вписать в данный шар радиуса R прямой конус с наибольшей полной поверхностью.

702. Из листа, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости.

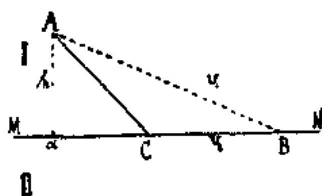
703. Сосуд состоит из цилиндра, открытого сверху и заканчивающегося снизу конусом, высота которого равна радиусу основания. Каковы должны быть размеры цилиндра и конуса для того, чтобы при данной поверхности S сосуд имел наибольший объем?

704. Тело состоит из цилиндра и двух конусов, построенных извне на основаниях цилиндра. Это тело вписано в шар радиуса R так, что основания и вершины конусов лежат на поверхности шара. Когда такое тело имеет наибольший объем?

705. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы стороны прямоугольника были параллельны осям эллипса.



Черт. 28.



Черт. 29.

706. Точка перемещается в среде I со скоростью v_1, в среде II — со скоростью v_2. По какому пути она переместится в наименьший промежуток времени из точки A в точку B, из которых ни одна не расположена на границе (прямолинейной) сред I и II? Расстояния точек A и B от границы MN равны h и h_1; расстояние проекции α точки A на границу MN от такой же проекции точки B, или длина $\alpha\beta = a$ (черт. 28).

707. Точка перемещается в среде, расположенной вне линии MN, со скоростью v_1, а по линии MN—со скоростью v_2. По какому пути она переместится в наименьший промежуток времени из точки A в точку B, расположенную на линии MN? Расстояние точки A от линии MN равно h, расстояние проекции α точки A на линию MN от B равно a (черт. 29).

708. В данный сегмент требуется вписать прямоугольник наибольшего периметра.

709. В данный сектор требуется вписать прямоугольник наибольшего периметра.

710. Вписать в данный шар радиуса R правильную треугольную призму наибольшего объема.

711. Дан прямой угол MON и точка A внутри его. Через точку A требуется провести прямую так, чтобы отрезок ее между сторонами угла имел наименьшую длину.

712. Из прямоугольных треугольников, с данною высотою h, какой имеет наименьший периметр?

713. Через точку A внутри угла MON требуется провести прямую так, чтобы сумма отрезков OM и ON, образуемых ею на сторонах угла, была наименьшая.

714. Через точку A внутри угла MON требуется провести прямую так, чтобы площадь треугольника, составляемого ею со сторонами угла, была наименьшая.

715. Два тела, двигающиеся равномерно со скоростями V и V' по прямым AO и $A O$, расположенными под углом α, выходят одновременно из точек A и A' по направлению к O ($OA = l$, $OA' = l'$). В какой момент расстояние между ними будет наименьшее?

716. Требуется построить цилиндр, открытый сверху, стенки и дно которого имеют данную толщину. Каковы должны быть размеры цилиндра, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала?

717. Требуется построить сосуд, состоящий из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой; толщина стенок постоянна. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости на него пошло наименьшее количество материала (черт. 30).


Черт. 30.

718. Требуется построить котел, состоящий из цилиндра, завершенного двумя полусферами, со стенками постоянной толщины, так, чтобы при данной вместимости он имел наименьшую наружную поверхность.

719. Из всех прямых конусов, описанных около данного шара, найти такой, который имеет наименьший объем.

720. Чашка имеет форму полусферы радиуса R с горизонтальным основанием. В нее опущен стержень длины $l > 2R$. При каком положении стержня середина его находится всего ниже (черт. 31)?

721. Стержень данной длины $2b$ опирается концами на две прямые, находящиеся в вертикальной плоскости и наклоненные к горизонтальной линии под углами α и β. При каком положении стержня его середина находится всего выше (черт. 32)?

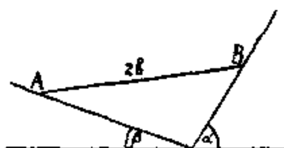
722. Прямой круговой конус пересекается плоскостью по параболическому сегменту. При каком положении плоскости площадь этого сегмента будет наибольшею (черт. 33)?

723. Через точку P внутри данного круга провести взаимно-перпендикулярные хорды APC и BPD так, чтобы площадь треугольника $ABCD$ была наибольшей.

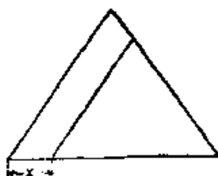
724. Треугольная пирамида пересекается плоскостью, параллельною двум противоположным ребрам. При каком положении секущей плоскости площадь сечения будет наибольшею?



Черт. 31.



Черт. 32.



Черт. 33.

725. Найти max. площади прямоугольника, зная, что сумма всех его сторон и диагоналей равна k.

726. Основанием полусферы служит круг радиуса R. В этот круг требуется вписать такой прямоугольник, чтобы прямая призма, имеющая его своим основанием, вырезывала из полусферы криволинейный четырехугольник наибольшей поверхности.

727. Две касательныя к данному кругу образуют между собой угол 2α. Требуется провести третью касательную таким образом, чтобы треугольник, образованный этими тремя прямыми, имел наименьшую площадь.

728. Светящаяся точка находится на линии центров сфер радиусов R и R' между центрами. При каком положении ее сумма освещенных частей сфер будет наибольшею?

729. Дан круг радиуса R и хорда AB. Провести хорду AC так, чтобы диагональ AD параллелограмма, построенного на прямых AB и AC, была наибольшей или наименьшей.

730. Даны сфера и плоскость. Где должна находиться вершина прямого кругового конуса, касающегося сферы и имеющего основание в данной плоскости, для того, чтобы объем его был наименьшим?

731. Прямой круговой конус требуется пересечь по эллипсу наибольшей площади.

Maxima и minima функций от многих переменных независимых.

Найти наибольшее и наименьшее значение следующих функций заданных явно.

732. $z = x^3y^2(a - x - y)$.

733. $z = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$.

734. $z = x^2 + xy + y^2 - ax - by$.

735. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ при $x > 0$ и $y > 0$.

736. $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

737. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ при условиях: $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$ $(a > 3)$

738. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ при условиях: $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$; $(a \geq 1)$.

739. $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2);\ a>0,\ b>0.$
740. $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}.$
741. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$
742. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$
743. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2).$
744. $z = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$ 745. $z = xe^{y + x\sin y}.$
746. $z = \sin x + \sin y - \sin(x+y);\ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$
747. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y);\ \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi;\ 0 \leq y \leq \frac{3}{2}\pi\right).$
748. $z = \cos x \cos y \cos(x+y);\ (0 \leq x \leq \pi;\ 0 \leq y \leq \pi).$
749. $z = (a\cos x + b\cos y)^2 + (a\sin x + b\sin y)^2.$
750. $z = \cos x \cos\alpha + \sin x \sin\alpha \cos(y - \beta).$
751. $f = x^2 + y^2 + z^2 + 2z - xy + x.$
752. $f = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$ при $x>0,\ y>0,\ z>0.$
753. $f = \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{x+z} + \frac{2z}{x+y}$ при $x>0,\ y>0,\ z>0.$

Найти наибольшее и наименьшее значение функций z, заданных неявно:

754. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$
755. $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0.$
756. $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0.$
757. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$
758. $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0.$
759. $x^2y - 3xy^2 + 6x + y^2 + 7y + z^2 - 3z - 14 = 0$, исследовать, имеет ли функция z max. или min. при $x = 1$ и $y = 2$?

Относительные maxima и minima.

Найти наибольшее и наименьшее значение следующих функций:

760. $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2};\ (a > 0)$
761. $z = x^m + y^m$ при $x + y = 2a,\ (a > 0).$
762. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2a;\ (a > 0).$
763. $z = xy$ при $x^2 + y^2 - 1 = 0.$
764. $z = xy$ при $a^2y^2 + b^2x^2 - x^2y^2 = 0;\ (a > 0,\ b > 0).$
765. $z = x^2 + y^2$ при $x^4 + y^4 = 1.$
766. $f = x + y + z$ при $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1;\ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$
767. $f = x^2y^3z^4$ при $2x + 3y + 4z = a.$
768. $f = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$ при условии $\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \ldots + \beta_nx_n = P;$ $\alpha_i > 0;\ \beta_i > 0;\ x_i > 0$ при $i = 1, 2, 3, \ldots n.$
769. $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при условиях: $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + 2y + 3z = 0.$
770. $f = x^2 + y^2 + z^2$ при условиях. $lx + my + nz = 0;\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$
771. $f = xyz$ при условиях: $x + y + z = 5,\ xy + yz + xz = 8.$

772. $f = x - y$ при условиях: $tg\,x = 3tg\,y$; $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$; $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$.

773. $f = sin\frac{x}{2} sin\frac{y}{2} sin\frac{z}{2}$ при условиях: $x + y + z = \pi$; $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

774. Доказать, что $|x| + |y| + |z| < \rho\sqrt{3}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

775. Заданный треугольник разделить на две равновеликие части прямою наименьшей длины.

776. Найти внутри четыреугольника точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин фигуры была бы minimum.

777. Определить наибольший по площади четыреугольник, который может быть составлен данными сторонами a, b, c и d в порядке, определенном последовательностью этих букв.

778. На плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от сторон треугольника наименьшая.

779. Между сторонами данного угла ($= \theta$) провести прямую длины l так, чтобы площадь образованного ею со сторонами угла треугольника была наибольшей.

780. Из всех плоскостей, проходящих через заданную точку, найти наиболее удаленную от начала координат.

781. Найти max. объема параллелепипеда при данной сумме $12a$ всех его ребер.

782. Найти прямоугольный параллелепипед, который имеет наибольший объем при данной поверхности.

783. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$, $2c$ описать эллипсоид наименьшего объема.

784. Через точку (a, b, c) провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

785. Определить наружные размеры закрытого ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и емкостью v так, чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

786. Определить наружные размеры открытого (без крышки) ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и емкостью v так, чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

787. Определить наружные размеры открытого (без крышки) ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и объемом материала v так, чтобы вместимость ящика была наибольшая.

788. Определить наружные размеры котла эллипсоидальной формы с заданной толщиной стенок α и емкостью v так, чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

789. Найти треугольник данного периметра, который вращением около одной из своих сторон производит тело наибольшего объема.

790. Из всех треугольных пирамид с данным основанием и данною высотою найти ту, которая имеет наименьшую поверхность.

791. Из всех цилиндров, имеющих одинаковую поверхность, найти цилиндр с наибольшим объемом.

792. В данный прямой круговой конус вписать параллелепипед наибольшего объема.

793. Найти прямой круговой конус, который при данной длине образующей имел бы наибольший объем.

794. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S определить конус с наибольшим объемом.

795. Из сосудов, имеющих форму усеченного конуса с образующими, наклоненными к плоскости основания под углом α, найти тот, у которого полная поверхность—наименьшая, при данном объеме V.

796. Разделить полуокружность на три дуги, сумма синусов которых была бы max.

797. В данный круг вписать треугольник так, чтобы сумма квадратов его сторон была наибольшей.

798. Около данного круга описать многоугольник, состоящий из n сторон, площадь которого была бы наименьшей.

799. В данный круг вписать многоугольник, состоящий из n сторон, площадь которого была бы наибольшей.

800. На эллипсе даны две точки; найти на том же эллипсе третью точку так, чтобы треугольник, имеющий вершинами указанные точки, был наибольшим по площади.

801. Найти кратчайшее расстояние от точки $(p, 4p)$ до параболы $y^2 = 2px$.

802. В заданный равнобедренный треугольник вписать параболу так, чтобы равные стороны его были касательными к параболе, а основание отсекало от нее сегмент наибольший по площади.

803. В данный эллипс вписать равнобедренный треугольник с основанием, параллельным большей оси, площадь которого была бы наибольшей.

804. На эллипсе найти точку, расстояние которой от точки, заданной на большей полуоси эллипса, было бы наименьшим.

805. Около данного эллипса описать треугольник с основанием, параллельным большей оси, площадь которого была бы наименьшею.

806. Провести к эллипсу такую касательную, чтобы отрезок ее между осями эллипса был наименьшим.

807. Найти длины осей эллипса, получаемого в сечении цилиндра $x^2 + 2y^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 0$.

808. Найти площадь эллипса, получаемого в сечении эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостью $lx + my + nz = 0$.

809. К эллипсоиду провести касательную плоскость, образующую с плоскостями симметрии эллипсоида тетраэдр наименьшего объема.

ОТДЕЛ III.

Геометрические приложения дифференциального исчисления.

I. Плоские кривые.

Нахождение уравнений кривых по заданным геометрическим условиям.

1. Прямая данной длины l скользит своими концами A и B по двум перпендикулярным прямым OX и OY. Из вершины C прямоугольника $OACB$ на движущуюся прямую опускается перпендикуляр. Найти геометрическое место основания этого перпендикуляра.

2. Прямая данной длины l скользит концами по двум перпендикулярным прямым. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных на переменную прямую из точки встречи двух данных (четырехлепестник).

3. Дан прямой угол XOY и на стороне его OX точка A. Через A проводятся линии, встречающие OY в точке D. По лучу AD от точки D в обе стороны откладываются длины $DM = DM' = OD$. Найти линию, описываемую точками M и M'. $OA = a$ (прямая строфоида).

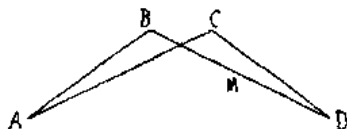
4 Через точку A, азятую на окружности круга, проводим секущую, которая встречает круг в точке D. По прямой AD от точки D с той и другой стороны откладывают отрезки DM и DN данной длины. Построить кривую (называемую улиткой Паскаля), описываемую точками M и N при вращении секущей около A. Рассмотреть частный случай этой кривой, когда длина DM равна диаметру круга.

5. Дан круг с центром в O радиуса R и точка A на его плоскости ($OA = a$). Проводится произвольный радиус OM и определяется точка пересечения P этого радиуса с линией AP, перпендикулярной к AM. Найти геометрическое место точек P.

6. Найти геометрическое место вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике с катетами R и $2R$, гипотенуза которого одним концом скользит по диаметру круга радиуса R, а другим — по окружности того же круга.

7. Найти геометрическое место точек касания касательных, проведенных из некоторой точки данной прямой к кругам постоянного радиуса R, имеющим центры на той же прямой.

8. Четыреугольник $ABCD$ состоит из 4-х стержней, связанных шарнирами в вершинах A, B, C, D. Длины стержней удовлетворяют условиям: $AC = BD$; $AB = CD$, $AC = AB\sqrt{2}$; точки A и C закреплены неподвижно. Какую линию описывает середина стержня BD при движении системы (черт. 34)?

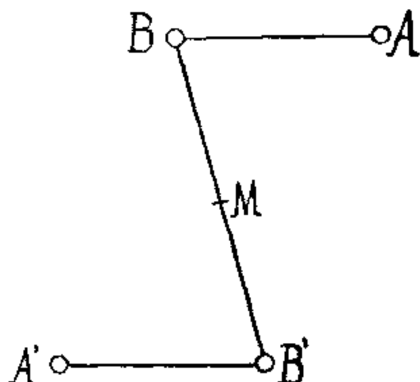


Черт. 34.

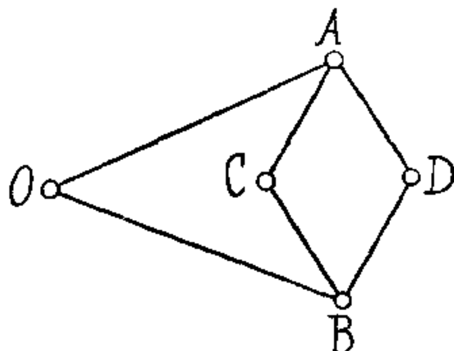
9. Три стержня $AB = A'B'$ и BB' соединены шарнирами в точках B, B'; точки A и A' неподвижны. Найти геометрическое место, описываемое серединою отрезка BB', когда AB и $A'B'$ вращаются около A и A' (черт. 35).

10. Шесть стержней $OA = OB$, $AC = AD$ $CB = BD$ соединены в точках O, A, B, C, D шарнирами, как указано на черт. 36. Точка O неподвижна. Точка C описывает некоторую окружность; найти геометрическое место точки D.

11. Определить, какой круг должна описывать точка C предыдущей задачи, чтобы точка D перемещалась по прямой линии.



Черт. 35.



Черт. 36.

12. Координаты точек Декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ могут быть представлены рациональными функциями параметра t следующим образом: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Вывести условие, при котором три точки, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3, лежат на одной прямой.

13. Доказать, что координаты точек кардиоиды $r = 2a\,(1 + \cos\theta)$ выражаются следующими рациональными функциями параметра t: $x = \frac{4a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$; $y = \frac{8at}{(1+t^2)^2}$. Вывести условие, при котором три точки кардиоиды, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3, лежат на одной прямой.

Касательные и нормали.

Провести касательную к кривой:

14. $y = x\lg x - 1$ в точке с ординатою $y = 1$.

15. $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$ в точке $(1, -2)$.

16. $x = e^t$, $y = \sin t$ в точке $t = 0$.

17. Найти угол между касательной и радиусом-вектором кривой $r^n = a^n \cos n\theta$.

18. Уравнение кардиоиды дано в параметрической форме; найти уравнение касательной к ней в точке с параметром t.

19. Провести касательную к кривой $x^3 - y^3 = 3x^2$, параллельную прямой $y = x$.

20. Найти уравнение той касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у которой отрезок ее между осями координат точкой касания делится пополам.

21. Касательные к кривым $y = \varphi(x)$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \frac{\lambda\varphi(x) + \mu\varphi_1(x)}{\lambda + \mu}$ в точках, соответствующих одинаковым абсциссам, пересекаются в одной точке.

22. Каждый радиус-вектор кривой $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ пересекает ее в трех точках, отличных от полюса. Доказать, что касательные в этих точках образуют равносторонний треугольник.

23. Доказать, что углы между касательными к кривым $r = \varphi(\theta)$ и $r = \frac{1}{\varphi(\theta)}$ и радиусом-вектором составляют в сумме π.

24. К лемнискате, параллельно данному направлению, вообще можно провести две пары вещественных касательных. Доказать, что линии, соединяющие точки касания каждой пары, составляют между собою угол $\frac{2\pi}{3}$.

25. Провести нормаль к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатою $y = 3$.

26. Провести нормаль к кривой Agnesi. $x^2y = a^2(a - y)$, параллельную прямой $3y - 50x = 0$.

27. Провести нормаль к кривой $y = a\lg\cos\frac{x}{a}$ в точке $x = 2\pi a$.

28. Провести нормаль к цепной линии $y = a\,ch\frac{x}{a}$ в точке $x = a$.

29. Провести нормаль к кардиоиде $r = 2a(1 + \cos\theta)$, образующую с полярной осью угол в 45°.

30. К параболе $y^2 = 2px$ провести нормаль так, чтобы ее отрезок между осями координат имел длину $\frac{p}{2}\sqrt{18}$.

31. Найти уравнение нормали эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в той его точке, где отрезок касательной между осями координат делится точкой касания пополам.

32. Найти уравнение нормали к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в той его точке, для которой отрезок касательной между осями координат имеет наименьшую длину.

33. Доказать, что всякая нормаль к кривой $x = \frac{2at}{1+t^2}; y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ проходит через одну и ту же точку.

34. Нормаль в лемнискате $r^2 = a^2\cos 2\theta$ образует с полярной осью угол $= 3\theta$.

35. Доказать, что отрезок касательной к кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину.

36. Доказать, что кривая $\frac{x+\sqrt{a^2-y^2}}{a} = \log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$ имеет постоянную длину касательной.

37. Доказать, что в любой точке кривой $e^{\frac{y}{a}} = x^2 - a^2$ сумма длин касательной и подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания.

38. Кривые $y = f(x)$ и $y = \sqrt{a^2 - [f(x)]^2}$ в точках с одинаковой абсциссой имеют равные поднормали.

39. Доказать, что отрезок нормали к кривой $x = a\sin t + \frac{a}{2}\sin t\cos^2 t$, $y = -\frac{a}{2}\cos^3 t$, заключенный между осями OX и OY, имеет постоянную длину a.

40. Найти длину полярной подкасательной и поднормали для спирали $r^2 = a^2\theta$.

41. Провести круг радиуса a, касательный к Декартову листу: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке с абсциссой $x = \frac{4a}{3}$.

42. Провести круг радиуса $3a$, нормальный к циссоиде $(x^2+y^2)x - 2ay^2 = 0$, в точке $x = a$.

43. Провести круг, проходящий через полюс и касательный к спирали Архимеда $r = R\theta$ в точке $\theta = \frac{\pi}{4}$.

44. Доказать, что параболы $y^2 = 2ux + u^2$ и $y^2 = -2vx + v^2$ пересекаются под прямым углом.

45. Доказать, что однофокусные эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

46. Определить соотношение между коэффициентами в уравнении двух кругов так, чтобы круги эти пересекались под прямым углом.

47. Под какими углами пересекает полярную ось спираль Архимеда $r = R\theta$?

48. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные к данной окружности.

49. Найти геометрическое место проекций центра эллипса на касательные.

50. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра равнобочной гиперболы на касательные.

51. Найти геометрическое место проекций вершины параболы на касательные к ней.

52. Доказать, что геометрическое место проекций полюса на касательные к логарифмической спирали есть логарифмическая спираль.

53. Доказать, что точки касания касательных, проведенных из данной точки к логарифмической спирали $r = ae^{m\theta}$, лежат на окружности круга, проходящего через полюс и через данную точку.

54. Из данной точки M к кардиоиде можно провести, вообще, три касательных Каково будет геометрическое место точки M, если три точки касания будут лежать на одной прямой?

55. Найти геометрическое место концов полярных подкасательных к кривой $r = \frac{a}{\theta}$.

56. Найти геометрическое место вершины угла данной величины, стороны которого касаются циклоиды (De la Hire).

57. Найти геометрическое место вершины параболы, катящейся по параболе равной величины.

58. Круг катится по другому кругу, зная радиусы кругов, определить кривую, описываемую точкой M, лежащей на окружности подвижного круга.

59. Доказать, что цепная линия $y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right)$ есть геометрическое место фокусов параболы с параметром p, катящейся по прямой.

60. Доказать, что циклоида, образованная катаньем круга по полярной оси, есть кривая, по коей можно катить кардиоиду так, чтобы острконечье ее описывало прямую линию.

Кривизна и радиус кривизны.

61. Найти радиус кривизны кривой $3ay^2 = 2x^3$.

62. Найти радиус кривизны кривой $x = t^2$, $y = t^3$ в точке (1,1).

63. Найти радиус кривизны для цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

64. Вычислить координаты центра кривизны кривой $xy = 1$ в точке (1,1).

65. Найти координаты центра кривизны строфоиды $y^2 = x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$.

66. Найти радиус кривизны и координаты центра кривизны кривой $y = a \log \cos \frac{x}{a}$, $(a > 0)$.

67. Найти радиус кривизны и координаты центра кривизны в той точке кривой $y = x \log x$, где касательная к ней параллельна оси OX.

68. Найти радиус кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в той его точке, где отрезок касательной между осями координат делится точкой касания пополам.

69. Найти наименьший радиус кривизны цепной линии

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

70. Найти радиус кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в той его точке, для которой отрезок касательной между осями координат имеет наименьшую длину.

71. Найти точку на кривой $y = a \log\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, где кривизна кривой наибольшая.

72. Найти точку на кривой $y = \log x$, где кривизна наибольшая.

73. Найти радиус кривизны лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

74. Найти радиус кривизны гиперболической спирали $r\theta = a$.

75. Найти координаты центра кривизны и радиус кривизны кардиоиды $r = a(1 + \cos\theta)$.

76. Найти центр кривизны кривой: $r = a\cos^3\theta$.

77. Доказать, что у кривых 2-го порядка радиус кривизны пропорционален кубу длины нормали.

78. Доказать, что радиус кривизны циклоиды равен удвоенной длине нормали.

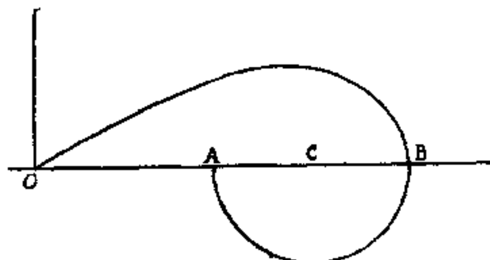
79. Доказать, что для кривой $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1$ радиус кривизны в $(n-1)$ раз меньше произведения длин отрезков касательной, заключенных между осями координат, деленного на расстояния от начала координат до касательной.

80. Для кривых $r^n = a^n \cos n\theta$ длина полярной нормали в $n+1$ раз больше радиуса кривизны.

81. Если r есть радиус-вектор кривой, p длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, и R радиус кривизны, то $R = \frac{rdr}{dp}$.

82. Доказать, что разложение длины l хорды некоторой кривой по степеням стягиваемой ею дуги s имеет вид: $l = s - \frac{1}{R^2}\frac{s^3}{24} - \frac{d\frac{1}{R^2}}{ds} \cdot \frac{s^4}{48} \ldots$, где R есть радиус кривизны кривой на конце хорды.

83. ACB полуокружность, имеющая центр в точке $C(a, 0)$ и радиус R. Соединить точки O и B дугою параболы так, чтобы получилась кривая, соединяющая точки O и A, имеющая во всех точках определенную касательную, непрерывно меняющийся радиус кривизны, и чтобы дуга ACB составляла часть кривой (черт. 37).



Черт. 37

84. Доказать, что соприкасающийся круг к кривой второго порядка в одной из вершин ее имеет соприкосновение третьего порядка.

85. Показать, что существует кривая второго порядка, имеющая в заданной точке соприкосновение 4-го порядка с кривой.

Эволюты.

86. Найти эволюту астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

87. Найти эволюту циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

88. Найти эволюту равнобочной гиперболы $xy = a^2$.

89. Найти общее выражение для эволюты кривых 2-го порядка.

90. Найти эволюту цепной линии $y = a\, Ch\, \frac{x}{a}$.

91. Найти эволюту синусоиды $y = a \sin \frac{x}{a}$.

92. Найти эволюту кривой $y = a\, lg \cos \frac{x}{a}$.

93. Найти эволюту кардиоиды $r = a\,(1 + \cos\theta)$

94. Найти эволюту лемнискаты.

95. Найти эволюту кривой (трактрисы) $x = k\, lg\, cotg\, \frac{t}{2} - k \cos t$, $y = k \sin t$.

96. Найти эволюту гипоциклоиды $x = \frac{a}{3}(2 \cos t + \cos 2t)$; $y = \frac{a}{3}(2 \sin t - \sin 2t)$.

Огибающие кривые.

97. Найти огибающую прямой, отсекающей от заданного угла ω треугольник постоянной площади $2m^2$.

98. Прямая перемещается таким образом, что сумма отрезков, образуемых ею на осях координат, постоянна. Найти огибающую этой прямой.

99. Найти огибающую прямой, сумма или разность квадратов расстояний которой до двух данных точек постоянна.

100. Вершина данного угла OPQ скользит по прямой AP, а одна из сторон проходит через точку O. Найти огибающую другой стороны.

101. Прямая равномерно вращается вокруг точки, движущейся по данной прямой с постоянной скоростью. Найти огибающую положений прямой.

102. Найти огибающую диаметра круга, катящегося без скольжения по данной прямой.

103. Найти огибающую прямой, соединяющей концы сопряженных диаметров эллипса.

104. Найти огибающую касательных к параболе $y^2 = 2px$.

105. Светящаяся точка находится на окружности данного круга. Найти огибающую (каустику) лучей, отраженных от окружности.

106. Параллельные лучи падают на вогнутое сферическое зеркало. Найти огибающую отраженных лучей.

107. Светящаяся точка $(a, 0)$ находится на оси параболы. Найти огибающую (каустику) лучей, отраженных от параболы $y^2 = 2px$.

108. Светящаяся точка находится в фокусе эллипса. Найти огибающую лучей отраженных от эллипса.

109. Лучи света, перпендикулярные к основанию циклоиды, падают на ее вогнутую сторону. Найти огибающую отраженных лучей.

110. На хордах круга, параллельных заданному направлению, как на диаметрах, описываются окружности. Найти их огибающую.

111. Из данной точки проведен ряд секущих к данному кругу. Найти огибающую кругов, построенных на полученных хордах, как на диаметрах.

112. Найти огибающую эллипсов, имеющих одну и ту же сумму полуосей, равную d.

113. Найти огибающую эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при условии $a^2 + b^2 = const. = c^2$.

114. Какое соотношение должно существовать между параметрами a и b прямой линии $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, чтобы оберткой ее различных положений служил круг $x^2 + y^2 = R^2$?

Построение кривых.

Определение направления вогнутости кривой в данной точке, вершин и точек перегиба.

115. Определить, выпукла или вогнута относительно оси OX парабола $y^2 = 8x$ в точке с абсциссою $x = 2$.

116. Определить направление вогнутости кривой $x(x^2 - y^2) + y^2 = 0$ в точках с абсциссою $x = \frac{3}{2}$.

117. Определить направление вогнутости кривой $x^4 = (x^2 - y^2) y$ в точках с отрицательными ординатами.

118. Определить выпуклость или вогнутость кривой $r = \frac{1}{\cos^3 \theta}$ в части ее, определяемой неравенствами $-\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$.

Найти вершины кривой:

119. $x^4 + 4x^2y^2 - 6a^2x^2 + a^4 = 0$.

120. $y = \sin \frac{1}{x}$.

121. Найти точки перегиба и вершины кривой:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Найти точки перегиба кривой:

122. $y = x^4 - 6x^2$.

123. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$.

124. $x^3 + y^3 = x^2$.

125. $(a^2 + x^2) y = ax^3$.

126. $y = x^{\frac{5}{3}} + 1$.

127. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$.

128. $r \cos^3 \theta = 1$.

129. $r = a(tg\theta - 1)$.

Исследование особенных точек.

Исследовать особенную точку кривой:

130. $y^2 = ax^2 + bx^5$.

131. $x^4 - ax^2y + ay^3 + \frac{1}{4} a^2y^2 = 0$.

132. $\left(\frac{y}{x-a}\right)^2 = x - b \ (a < b)$.

133. $y^4 = bx^3 - ax^2$.

134. $ay^2 = x^5 - bx^2$.

135. $x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$.

136. $y = x \, arctg \frac{1}{x}$.

137. $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

138. $y = x \lg x$.

139. $y \lg x = 1$.

140. $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

Исследование бесконечных ветвей.

141. Доказать, что парабола не имеет асимптот.

Найти асимптоты кривой:

142. $(y + x)(y^2 - xy + x^2) + 2y - x = 0$.

143. $y^3 - x^3 = x^2 + y^2$.

144. $y = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$.

145. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$.

146. Исследовать расположение ветвей кривой: $x^3 - y^3 + (y - x)^2 = 0$ относительно ее асимптоты.

147. Исследовать расположение ветвей кривой $y^3 = ax^2 + x$ относительно ее асимптоты.

148. Исследовать бесконечные ветви кривой $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x + b}$.

Общее исследование кривых.

Построить кривую:

149. $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$.

150. $x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$.

151. $y^4 - 2xy^2 - 3x^2 + x^4 = 0$.

152. $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$.

153. $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

154. $(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

155. $y^2 - x^3 + 2x^2 - x = 0$.

156. $x^5 + 5ax^4 - a^3y^2 = 0$.

157. $2y^3 - 15x^3y + x^6 = 0$.

158. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$.

159. $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$.

160. $(2x + y)^2(x + y) - x = 0$.

161. $(x^2 - y^2)(x - y) + 1 = 0$.

162. $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0$.

163. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.

164. $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$.

165. $x^2y^2 = (y + 1)^2(8 - y^2)$.

166. $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 1}$.

167. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

168. $x^3 + y^3 - 3x^2 = 0$.

169. $2x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

170. $x^4 - y^4 = 4x^2y$.

Построить кривую, заданную в параметрической форме:

171. $x = \frac{2 + t^2}{1 + t^2}; \; y = t + \frac{t}{1 + t^2}$.

172. $x = \frac{t}{1 - t^2}; \; y = \frac{t(1 - 2t^2)}{1 - t^2}$.

173. $x = \frac{2t - 1}{t^3(t - 1)}; \; y = \frac{2t - 1}{t^2(t - 1)}$.

174. Построить кривую $y^2 = a^2 \sin \frac{y}{x}$.

Кривые двоякой кривизны

Касательная прямая и нормальная плоскость.

Провести касательную к кривой:

175. $y^2 + z^2 = 25$; $x^2 + y^2 = 10$ в точке (1, 3, 4).

176. $x^2 + y^2 = z$; $x = y$ в точке (x_0, y_0, z_0).

177. Найти уравнение касательной к кривой и косинусы углов, составляемых ею с осями координат: $x^2 = 2az$; $y^2 = 2bz$.

178. Провести касательную к кривой: $y^2 = 2px$; $z^2 = 2qx$ в точке с абсциссою $x = p + q$ и найти ее длину от точки касания до пересечения с плоскостью $x = 0$.

179. Определить косинусы углов касательных к кругу в пространстве с какими-либо осями прямоугольных координат.

180. Найти уравнение касательной к кривой и косинусы углов, составляемых ею с осями координат: $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $z = 4 \sin \frac{t}{2}$.

181. Доказать, что линии пересечения цилиндров $y^2 + z^2 = k^2$ с поверхностью $xy = az$ пересекают все образующие этой поверхности, принадлежащие к одной системе, под прямым углом.

182. Если ω — долгота, а λ — дополнение широты точки на сфере, то линия, имеющая уравнение $\omega - \omega_0 = tg\,\theta \log tg \frac{\lambda}{2}$, пересекает все меридианы сферы $\omega = const.$ под постоянным углом θ.

183. Из некоторой точки на оси прямого кругового цилиндра опускаются перпендикуляры на касательные ко всем винтовым линиям одинакового шага, которые могут быть помещены на поверхности цилиндра. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров.

184. Из точек винтовой линии проводятся прямые, параллельные одной из касательных к винтовой линии. Найти геометрическое место следов этих прямых на основании цилиндра, на котором находится упомянутая винтовая линия.

185. Найти уравнение нормальной плоскости кривой $z = x^2 - y^2$, $y = x$.

186. Найти уравнение нормальной плоскости кривой $y^2 = 2px$, $x^2 + z^2 = a^2$ в точке с абсциссою $x = \frac{p}{2}$.

187. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости кривой: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

188. Доказать, что нормальные плоскости кривой: $x = a \cos t$, $y = a \sin \alpha \sin t$, $z = a \cos \alpha \sin t$, где t — переменный параметр, все проходят через прямую $x = 0$, $z - y\,tg\,\alpha = 0$.

Соприкасающаяся плоскость.

Найти уравнение соприкасающейся плоскости кривой:

189. $y^2 = x$, $x^2 = z$ в точке (1, 1, 1).

190. $y = \varphi(x)$, $z = a\varphi(x) + b$. **191.** $x^2 = 2az$, $y = 2bz$.

192. Найти соприкасающуюся плоскость кривой: $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$.

193. Найти уравнение соприкасающейся плоскости кривой: $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

Нормаль и бинормаль.

Найти уравнения главной нормали и бинормали к кривой:

194. $x^2 = 2az$; $y^2 = 2bz$.

195. $y^2 = x$, $x^2 = z$ в точке (1, 1, 1).

196. $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$.

197. Кривая $x = R\, ch\, t \cos t$, $y = R\, ch\, t \sin t$, $z = Rt$ лежит на поверхности вращения $x^2 + y^2 = R^2 ch^2 \frac{z}{R}$, называемой катеноидом. Доказать, что во всякой точке бинормаль этой кривой будет нормалью поверхности.

198. Некоторая кривая имеет проекцией на плоскость XOY синусоиду $y = \sin x$. Какому условию должны удовлетворять точки этой кривой, чтобы главные нормали ее были параллельны плоскости YOZ?

199. По главным нормалям винтовой линии откладываются отрезки данной длины. Найти геометрическое место их концов.

1-ая и 2-ая кривизна.

200. Найти радиус первой кривизны кривой, определяемой пересечением поверхностей: $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$, в точке (1, 1, 1).

201. Определить радиус 1-ой кривизны кривой: $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

202. Вычислить радиус 2-ой кривизны кривой $y^2 = x$, $x^2 = z$.

203. Определить радиусы 1-ой и 2-ой кривизны кривой: $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$.

204. Определить радиус 1-ой кривизны кривой:

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4 \sin \frac{t}{2}.$$

295. Найдя координаты центра кривизны простой винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$, определить условие, чтобы геометрическое место этих центров лежало на том же цилиндре, на котором расположена винтовая линия.

Поверхности.

Касательная плоскость и нормаль.

Провести касательную плоскость к поверхности:

206. $xy^2 + z^3 = 12$ в точке (1, 2, 2).

207. $x^m + y^m + z^m = a^m$.

209. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2 + z^2)$.

209. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.

210. Провести к эллипсоиду касательную плоскость, отсекающую на осях координат равные отрезки.

211. Найти линию пересечения однополого гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ с касательною плоскостью, проведенною в точке (x_0, y_0, z_0).

212. Найти линии, по которым поверхность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ пересекается с касательною плоскостью, проведенною через точку (x_0, y_0, z_0) на поверхности.

213. Найти линии, по которым поверхность $xy = az$ пересекается с касательною плоскостью, проведенною через точку (x_0, y_0, z_0) на поверхности.

214. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности косого геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = ku$.

215. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$.

216. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ образуют с плоскостями координат тетраедр постоянного объема.

217. Доказать, что поверхности $xy = \alpha z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = \beta$, $z^2 + 2x^2 = \gamma(z^2 + 2y^2)$ пересекаются под прямым углом.

218 Доказать, что поверхности $xyz = \alpha$ и $2z^2 = x^2 + y^2 + \Phi(x^2 - y^2)$ пересекаются под прямым углом.

219. Найти геометрическое место проекций начала координат на касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$.

220. Найти геометрическое место проекций центра эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ на касательные плоскости.

Поверхности цилиндрические, конические и поверхности вращения.

221. Найти уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой служит кривая $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2Ry$, а образующие параллельны направлению $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$.

222. Найти уравнение цилиндра, описанного около шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, с образующими, параллельными прямой $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

223. Найти уравнение цилиндра с образующими, параллельными прямой $x = y = z$, описанного около эллипсоида $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

224. Поверхность, происходящая от вращения кривой $x = \sin z$, $y = 0$ около оси OZ, освещается параллельными лучами, составляющими с осью OZ угол $45°$. Найти форму границ тени, бросаемой поверхностью на плоскость XOY.

225. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке $(-1, 0, 0)$ и касающейся параболоида $y^2 + \frac{z^2}{2} = 2x$.

226. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке (a, b, c), а направляющей — параболу $z = 0$, $y^2 = 2px$.

227. Найти уравнение конуса с вершиной в точке $(0, 0, -3c)$, описанного около поверхности $xyz = c^3$.

226. Найти уравнение поверхности вращения круга $(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$ около оси OY.

229. Найти уравнение поверхности, получаемой от вращения параболы $y^2 = 2px$ около касательной в вершине.

230. Найти уравнения поверхностей вращения лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ около осей OX и OY.

Огибающие поверхности.

231. Найти огибающую плоскостей, отсекающих от данного трехгранного угла тетраедр постоянного объема.

232. Найти обертку плоскостей, проходящих через заданную точку и находящихся на одинаковом расстоянии от другой заданной точки.

233. Найти огибающую плоскостей, отсекающих от данного прямого кругового конуса постоянный объем v.

234. Найти обертку шаров $(x-lt)^2+(y-mt)^2+(z-nt)^2=r^2$, где t — произвольный параметр.

235. Найти поверхность, огибающую переменные положения шара данного радиуса R, центр которого движется по окружности $x^2+z^2=r^2$, $y=0$.

ОТДЕЛ IV.

Высшая алгебра.

Вычисление определителей.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 8, & 4, & 2, & 2 \\ -4, & 3, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 2, & 2 \\ 4, & 0, & 2, & 1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 5, & 0, & 4, & 2 \\ 1, & -1, & 2, & 1 \\ 4, & 1, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 1, & 4, & -1 \\ -1, & 8, & 3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 9, & 13, & 17, & 4 \\ 18, & 28, & 33, & 8 \\ 30, & 40, & 54, & 13 \\ 24, & 37, & 46, & 11 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 5, & -10, & 11, & 0 \\ -10, & -11, & 12, & 4 \\ 11, & 12, & -11, & 2 \\ 0, & 4, & 2, & 6 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ 1, & 1+a, & 1, \\ 1, & 1, & 1+b \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1, & c, & -b \\ -c, & 1, & a \\ b, & -a, & 1 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1+a, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1+b, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1+c, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1+d \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} x, & y, & x+y \\ y, & x+y, & x \\ x+y, & x, & y \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x, & y, & z \\ x^2, & y^2, & z^2 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} (b+c)^2, & a^2, & a^2 \\ b^2, & (c+a)^2, & b^2 \\ c^2, & c^2, & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} a, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & b, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & c, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & d \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ x_1, & x_2, & & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2}, & x_2^{n-2}, & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^n, & x_2^n, & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$.

15. $$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-2}, & x_2^{n-2}, & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n+1}, & x_2^{n+1}, & \ldots & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

16. Выяснив свойства функции $f(x)$, заданной уравнением

$$\begin{vmatrix} f(x), & 1, & x, & x^2, & \ldots & x^m \\ b_0, & 1, & x_0, & x_0^2, & \ldots & x_0^m \\ b_1, & 1, & x_1, & x_1^2, & \ldots & x_1^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_m, & 1, & x_m, & x_m^2, & \ldots & x_m^m \end{vmatrix} = 0,$$ найти ее

Вычислить определители:

17. $$\begin{vmatrix} \cos(a-b), & \cos(b-c), & \cos(c-a) \\ \cos(a+b), & \cos(b+c), & \cos(c+a) \\ \sin(a+b), & \sin(b+c), & \sin(c+a) \end{vmatrix}.$$

18. $$\begin{vmatrix} \sin a, & \cos a, & \sin 2a \\ \sin b, & \cos b, & \sin 2b \\ \sin c, & \cos c, & \sin 2c \end{vmatrix}.$$

19. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}.$$

20. $$\begin{vmatrix} \sin^3\alpha, & \sin^2\alpha\cos\alpha, & \sin\alpha\cos^2\alpha, & \cos^3\alpha \\ \sin^3\beta, & \sin^2\beta\cos\beta, & \sin\beta\cos^2\beta, & \cos^3\beta \\ \sin^3\gamma, & \sin^2\gamma\cos\gamma, & \sin\gamma\cos^2\gamma, & \cos^3\gamma \\ \sin^3\delta, & \sin^2\delta\cos\delta, & \sin\delta\cos^2\delta, & \cos^3\delta \end{vmatrix}.$$

21. Полагая $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и обозначая минор, соответствующий элементу a_{ik}, через A_{ik}, доказать, что

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}.$$

22. Полагая $\varphi(\lambda) = (a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\ldots(a_n-\lambda)$, доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & a_2 & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & \lambda & a_3 & \ldots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & a_n \end{vmatrix} = \varphi(\lambda) - \lambda\frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Теория комплексных чисел.

23. Пусть z_1 и z_2 два комплексных числа.
Доказать, что

$$mod\, z_1 + mod\, z_2 = mod\left[\frac{z_1 - z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right] + mod\left[\frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right].$$

Доказать равенства:

24. $x + y\,(\cos\theta + i \sin\theta) = [x' + y'\,(\cos\theta + i\sin\theta)]\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, если $x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta' - \alpha')}{\sin\theta}$, $y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha}{\sin\theta}$ и $\theta' = \alpha' - \alpha$.

25. $|x+y| + |x-y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|$.

26. $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2\,\{|x|^2 + |y|^2\}$.

27. Доказать, что всякой величине, модуль которой единица, можно дать вид: $\frac{x+i}{x-i}$, где x вещественно.

Найти геометрическое место точек плоскости комплексного переменного, представляющих собой изображения чисел x, где:

28. $x = \frac{at+b}{t-c}$ и модуль t равен единице.

29. $x = \frac{1}{2}\left(at + \frac{b}{t}\right)$ и модуль t равен единице.

30. $x = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} + c$ и модуль t равен единице

31. Найти кубические корни из i.

32. Найти корни 5-ой степени из i.

Решить уравнения:

33. $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$.

34. $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n + \frac{1+ai}{1-ai}$.

35. Выразить $\cos 6\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

36. » $\sin 5\varphi$ » » $\cos\varphi$ » $\sin\varphi$.

37. » $\cos 4\varphi$ » » $\cos\varphi$ » $\sin\varphi$.

38. » $\cos^4\varphi$ через тригонометрические функции кратных дуги φ.

39. » $\cos^5\varphi$ » » » » φ.

Найти:

40. $\log\,(1-e)$.

41. $\log\, i$.

42. $\log\,(1+i)$.

43. $\log\,(1+xi)$.

44. 2^i.

45. i^i.

46. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^i$.

47. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^i$.

43. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)^i$.

49. $tg\,\frac{\pi}{2}i$.

50. $\sin(x+yi)$, $\cos(x+yi)$.

51. Решить уравнение $e^{xi} - e^{-xi} = -2a$, где a вещественное число.

52. Проследить, как изменяется аргумент $x(x-1)$, когда x описывает замкнутую кривую в направлении, обратном часовой стрелке, заключающую точки $x = 0$, $x = 1$.

53. Проследить, как изменяется аргумент $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-1}$, когда x описывает замкнутую кривую около начала координат в направлении, обратном часовой стрелке, заключающую точку $x = 1$.

54. Проследить, как изменяется аргумент $\sqrt{x(x-1)}$, когда x описывает замкнутую кривую в направлении, обратном часовой стрелке.

55. Проследить, как изменяется функция $u = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta$, когда z описывает замкнутую кривую около точек a и b в направлении, обратном часовой стрелке.

56. Проследить, как изменяется функция $u = (z-a)^\alpha \log(z-a)$, когда z описывает замкнутую кривую около точки a в направлении, обратном часовой стрелке.

57. Проследить, как изменяется функция $u = (z-a)^\alpha \log^2(z-a)$, когда z описывает замкнутую кривую около точки a в направлении, обратном часовой стрелке.

Разложение дробей на простейшие.

Разложить на простейшие дроби:

58. $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$.

59. $\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$.

60. $\frac{x^5-3x^4+2x^3-x^2+3x-5}{(x-1)^2(x-2)}$.

61. $\frac{4(x^2+1)-x^3(x^3+1)}{x^7+4x^2+4x^3}$.

62. $\frac{x^6-x^2+1}{(x-1)^3}$.

63. $\frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}$.

64. $\frac{x^5-2x^6+5x^3+4x^2+3x+1}{x^4+x^3+x^2}$.

65. $\frac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$.

66. $\frac{x^6-2x^3}{(x^2+x+1)^2}$.

67. $\frac{x^4+2x^2-2}{(x^4-1)(x^2+1)}$.

68. $\frac{x^2+4x^2+x^3+x+1}{x^5-2x^3+1}$.

69. $\frac{25}{4x^3-20x^2+25x}$.

70. $\frac{9x^6-x^3-17x^2-3}{x^3(3x^2+1)^2}$.

71. $\frac{1}{x^4+4}$.

72. $\frac{x^2-1}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}$.

73. $\frac{x^2-1}{x^3-3x+1}$.

74. $\frac{x^3}{x^3+1}$.

75. $\frac{x^5}{x^4-1}$.

76. $\frac{x^4}{x^3-19x+30}$.

77. $\frac{x^4}{x^4-x^2+1}$.

78. Зная, что $a_1 a_2 \ldots a_k$ суть корни полинома $f(x)$ кратностей $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$, разложить дробь $\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2$ на простейшие.

79. $a_1 a_2 \ldots a_n$ простые корни полинома $f(x)$. Доказать, что

$$\frac{a_1^p}{f'(a_1)} + \frac{a_2^p}{f'(a_2)} + \ldots + \frac{a_n^p}{f'(a_n)} = 0,$$

если целое число p меньше, чем $n-1$ (n степень $f(x)$).

Уравнения 3-й степени.

Решить уравнения.

80. $x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0.$

81. $x^3 + 3x^2 \quad 4x \quad 1 = 0.$

82. $x^3 + 6x^2 + 6x + 7 = 0.$

83. $x^3 - 3x^2 - 3x + 10 = 0.$

84. $x^3 - 3x^2 \quad 3x + 9 = 0.$

85. Вычислить при помощи логарифмических таблиц корни уравнения $x^3 - 5x + 1 = 0.$

86. Вычислить средний корень предыдущей задачи с точностью до 0,00001.

87. Вычислить высоту шарового сегмента, объем которого равен $\frac{1}{4}$ объема шара. Радиус шара 1 метр.

88. Решить уравнение $x^4 - x^3 + 6x^2 + 8x + 2 = 0.$

89. Отделить корни уравнения: $\varphi(\lambda) = \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$

Нахождение рациональных и кратных корней.

Найти рациональные корни уравнений:

90. $6x^5 \quad 11x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 14x - 3 = 0.$

91. $6x^5 + 11x^4 - x^3 \quad 5x - 6 = 0.$

92. $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0.$

93. $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x \quad 20 = 0.$

94. $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0.$

95. $4x^4 - 11x^3 + 9x - 2 = 0.$

96. $6x^4 \quad 41x^3 + 85x^2 \quad 51x + 9 = 0.$

97. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x \quad 2 = 0.$

98. $4x^6 + 13x^5 + 16x^4 - 23x^3 - 5x^2 - 45x + 18 = 0.$

99. $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0.$

100. $6x^5 + x^4 \quad 14x^3 \quad 4x^2 \quad 5x - 2 = 0.$

101. $2x^6 - x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0.$

Найти кратные корни уравнений.

102. $8x^5 + 4x^4 \quad 58x^3 - 45x^2 \quad 108x + 108 = 0.$

103. $8x^5 - 4x^4 - 58x^3 + 45x^2 + 108x \quad 108 = 0.$

104. $16x^5 - 16x^4 - 72x^3 - 64x^2 - 23x - 3 = 0.$

105. $9x^5 + 96x^4 \quad 292x^3 + 48x^2 \quad 576x + 256 = 0.$

106. $9x^5 + 120x^4 + 580x^3 + 1200x^2 + 960x + 256 = 0.$

107. $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 16x + 32 = 0.$

108. $x^5 - 4x^3 + 2x^2 \quad 3x \quad 2 = 0.$

109. $x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 1 \quad 0.$

110. $x^6 - 15x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 24x - 32 = 0.$

111. $(x + 1)^7 - x^7 + 7x + 6 = 0.$

112. $\quad 3x^6 + 5x^5 \quad 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0.$

113. $x^8 + 2x^6 - 2x^2 - 1 = 0.$

Отделение и вычисление корней.

Отделить вещественные корни уравнений:

114. $x^4 \quad 2x^3 \quad 5x^2 + 2x + 0{,}9 = 0.$

115. $x^5 \quad 2x^4 \quad 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0.$

116. $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 39x - 21 = 0.$

117. $2x^5 - x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0.$

118. $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 18x + 12 = 0.$

119. $3x^5 - 15x^4 - 35x^3 + 165x^2 + 360x \quad 1080 = 0.$

120. $x^{2n+1} + px + q = 0.$

Отделить по способу Fourier корни уравнений:

121. $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0.$

122. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} = 0.$

123. $x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0.$

124. $x^4 + 6x^3 \quad 2x^2 + 1 = 0.$

125. $x^5 + x^4 \quad x^2 - 25x - 36 = 0$

126. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.$

127. $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0.$

128. $x^5 - 3x^4 \quad 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$

129. $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$

130. $x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012 = 0.$

131. $5x^5 \quad 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51 = 0.$

132. $x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$

Отделить по способу Sturm'a корни уравнений.

133. $x^4 - 6x^3 + x^2 \quad 1 = 0.$

134. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4 = 0.$

135. $x^4 + x^3 \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0.$

136. $x^5 + 5x^3 - 7x + 2 = 0.$

137. $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0.$

138. $x^3 + 11x^3 - 102x + 181 = 0.$

139. $x^4 - 12x^3 - 55x^2 + 96 = 0.$

140. $x^6 + 7x^3 - 5x + 11 = 0.$

141. $x^4 - 7x^3 + x^2 - 2 = 0.$

142. Составить ряд функций Sturm'a для уравнения: $x^3 + px + q = 0.$

143. Вычислить корни уравнения $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ с точностью до 0,01

144. Вычислить корни уравнения $x^8 - 12x^2 + 3 = 0$ с точностью до 0,01.

145. Отделить корни уравнения $x^5 + 5x + 1 = 0$ и вычислить с точностью до 0,00001.

146. Отделить корни уравнения $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ и вычислить с точностью до 0,1.

147. Вычислить наибольший корень задачи № 85 с точностью до 0,0001.

Вычислить по способу Греффе корни уравнений:

148. $x^3 - 3x + 1 = 0.$

149. $x^3 - 7x - 7 = 0.$

150. $x^3 \quad 5x + 1 = 0.$

151. $x^3 - 8x + 15 = 0.$

152. $2x^3 - 5x^2 + 7x \quad 2 = 0.$

153. $x^3 - 1{,}74x^2 - 2{,}52x + 3{,}97 \quad 0.$

154. $x^4 - 8x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$

155. $x^4 + 4{,}002x^3 + 14{,}01801x^2 + 20{,}03802x + 25{,}07005 = 0.$
156. $3{,}22x^6 + 4{,}12x^4 + 3{,}11x^3 - 7{,}25x^2 + 1{,}88x - 7{,}84 = 0.$
157. $7x^5 + 5{,}47x^3 - 3{,}33x^2 - 1{,}72x + 0{,}15 = 0.$

Вычисление корней трансцендентных уравнений.

158. Вычислить с точностью до $\frac{1}{1000}$ корень уравнения $\sqrt{\sin x} + x = 1$.

159. Вычислить с точностью до 0,001 корень уравнения

$$x = 1 + \frac{1}{10} \sin x.$$

160. Вычислить с точностью до 0,0001 корень уравнения

$$x = \frac{1}{10} e^{x}.$$

161. Вычислить с точностью до 0,01 корень уравнения $e^{-x} = x$.

162. Найти три значащих цифры корней уравнения

$$x^2 - 10 \log x - 3 = 0.$$

163. Вычислить корень уравнения $x \log x = 100$ с точн. до $\frac{1}{10^7}$.

164. Вычислить корень уравнения $x = \cos x$ с точн. до $\frac{1}{10^8}$.

165. Вычислить наименьший положительный корень уравнения

$$x = \operatorname{tang} x \text{ с точн. до } \frac{1}{10^8}.$$

166. Вычислить наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ch} x \cos x = 1$ с точн. до $\frac{1}{10^8}$.

167. Вычислить наименьший положительный корень уравнения

$$1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{x^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{x^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \ldots = 0$$

с точностью до $\frac{1}{10^4}$.

168. Вычислить наименьший положительный корень уравнения:

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3 \cdot 2^2} - \frac{x^3}{4 \cdot (2 \cdot 3)^2} + \frac{x^4}{5 (2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \ldots = 0 \text{ с точн. до } \frac{1}{10^4}.$$

Симметрические функции.

Найти значения симметрических функций от корней следующих уравнений:

169. $x^5 - 3x^3 - 5x + 1 = 0.$ Найти $\sum x_1^4$.

170. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$ Найти $\sum x_1^5 x_2$.

171. $x^3 - x - 1 = 0.$ Найти $\sum x_1 (x_2 - x_3)^2$.

172. $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0.$ Найти $\sum (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2$.

173. $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0.$ Найти $\sum x_1^3 x_2^3 x_3^3$.

Полагая $\sum x_1^n = s_n$, доказать, что между корнями уравнения существуют соотношения:

174. $\sum (x_1 - x_2)^4 = s_0 s_4 - 4 s_1 s_2 + 3 s_2.$

175. $\sum (x_1 - x_2)^6 = s_0 s_6 + 15 s_2 s_4 - 10 s_3^2.$

176. Представить $y = \frac{5x + 6}{1 + x + x^2}$ в виде целой функции от x, где x корень уравнения: $x^3 - 2 = 0$.

177. Представить $y = \frac{1}{x^3 - x + 2}$ в виде целой функции от x, где x корень уравнения $x^4 - 5 = 0$.

178. Представить $y = \frac{1}{1 + 2x + x^2}$ в виде целой функции от x, где x корень уравнения: $x^3 - x - 1 = 0$.

ОТДЕЛ V

Интегрирование функций.

Введение: простейшие определенные интегралы.

1. $\int\limits_0^1 x^{a-1}\,dx;\ a>0.$

2. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^{a+1}},\ a>-1.$

3. $\int\limits_0^1 \sqrt[m]{x^n}\,dx;\ m>0,\ n>0.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[m]{x^n}},\ m>n>0.$

5. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}.$

6. $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}.$

7. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{1-x^2}.$

8. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx.$

9. $\int\limits_0^{a} \sin x\,dx.$

10. $\int\limits_0^{\pi} \cos x\,dx.$

11. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} tg\,x\,dx.$

13. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{2+x^4}.$

14. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

15. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}.$

16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

17. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

18. $\int\limits_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

19. $\int\limits_0^1 \log x\,dx.$

20. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

21. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

22. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

23. Вычислить $\int\limits_0^1 (\sqrt{x^3} - 2\sqrt[3]{x^2})^2 (\sqrt{x^3} + 4\sqrt[3]{x^2})\,dx$ с точностью до 0,1.

24. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ с точностью до 10^{-4}.

25. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ с точностью до 10^{-6}.

26. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ с точностью до 10^{-4}.

27. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ с точностью до 10^{-5}.

Простейшие неопределенные интегралы.

28. $\int (ax+b)\,dx.$

29. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx.$

30. $\int (2x+5)^3\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{3x+5}.$

32. $\int \frac{x\,dx}{2x+1}.$

33. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$

34. $\int \frac{(x+1)\,dx}{3x^2+2}.$

35. $\int \frac{x^3 dx}{4x^4+1}.$

36. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}.$

37. $\int \frac{x^5\,dx}{2x^3+5}.$

38. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{ax^n+b}.$

39. $\int \frac{x^n\,dx}{x-1}$ (n цел. полож.).

40. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$

41. $\int \frac{dx}{2x^2+9}.$

42. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+1}.$

43. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}.$

44. $\int \frac{x^5\,dx}{x^2+1}.$

45. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^2}.$

46. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+4}.$

47. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^{2n}+a^2}.$

48. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}.$

49. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

50. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}.$

51. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt[n]{x^n+a}}.$

52. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx.$

53. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx.$

54. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx.$

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

57. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}.$

58. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^8}}.$

59. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}.$

60. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

61. $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x}}.$

62. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

63. $\int \frac{x\,dx}{2+\sqrt[3]{x^2-1}}.$

64. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}.$

65. $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x}}.$

66. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$

67. $\int \frac{x^3\,dx}{(1-x^2)^{5/2}}.$

68. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$

69. $\int e^{x^2}x\,dx.$

70. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4}.$

71. $\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx.$

72. $\int \frac{\log x}{x}\,dx.$

73. $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}\,dx.$

74. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,sin} x)^3\sqrt{1-x^2}}.$

75. $\int \cos^5 x\sin x\,dx.$

76. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

77. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}.$

78. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,.\,\sin 2x\,dx.$

79. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$

80. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{2\sin^2 x+3}.$

81. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^2 x+4}.$

82. $\int \frac{\cos x\sin 2x\,dx}{3\cos^3 x-2}.$

83. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx.$

84. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx.$

85. $\int \operatorname{tg} 5x\,dx.$

86. $\int \frac{dx}{\operatorname{cotg} 3x}.$

87. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\,dx.$

88. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

89. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}.$

90. $\int \frac{dx}{3-\cos^2 x}.$

91. $\int x^3\log x\,dx.$

92. $\int (\log x)x^2\,dx.$

93. $\int \frac{\log x}{x^5}\,dx.$

94. $\int \frac{(\log x)^3}{x^2}\,dx.$

95. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

96. $\int x^5\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

97. $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx.$

98. $\int x^2\operatorname{arc\,sin} x\,dx.$

99. $\int \operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx.$

100. $\int \frac{x \arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

101. $\int e^{2x} x^5 \, dx$.

102. $\int e^{-x^2} x^5 dx$.

103. $\int x \sin 2x \, dx$.

164. $\int x^2 \cos x \, dx$.

105. $\int x^2 \cos^2 x \, dx$.

Интегрирование рациональных функций.

106. $\int \frac{dx}{1-x^2}$.

107. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$.

108. $\int \frac{x^4 \, dx}{x^2-1}$.

109. $\int \frac{x^3}{(2+x)^3} dx$.

110. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$.

111. $\int \frac{x^3-2x^2-6x+5}{(x-2)^2(x-1)} dx$.

112. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx$.

113. $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$.

114. $\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+1)^2}$.

115. $\int \frac{x^4+x^2-2}{x(x^2-1)^2} dx$.

116. $\int \frac{3x^7-x^6-6x^5}{(x-1)^3(x+1)^2} dx$.

117. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

118. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

119. $\int \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)}$.

120. $\int \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)}$. Рассмотреть два случая: 1) $n>0$, 2) $n<0$ $(n=-m)$.

121. $\int \frac{x dx}{(1+x)(1+2x)^2(1+x^2)}$.

122. $\int \frac{x^6+1}{x^6+x^4} dx$.

123. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

124. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$.

125. $\int \frac{dx}{1-x^4}$.

126. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$.

127. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

128. $\int \frac{1-x^4}{1+x^4} dx$.

129. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^4}$.

130. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

131. $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} dx$.

132. $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)(x^2-4)}$.

133. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)(x^2+x+3)(x^2+x+4)}$.

134. $\int \frac{1+x^4}{x^3-x^2+x-1} dx$.

135. $\int \frac{2x^2+6x+5}{x^3+3x^2+2x} dx$.

136. $\int \frac{3x^2-4}{x^4+x^2-8x-12} dx$.

137. $\int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2} dx$.

138. $\int \frac{x^2 dx}{x^4-x^2-2}$.

139. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

140. $\int \frac{x^3+4x^2+6}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx$.

141. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} dx$ (выделить алгебраич. часть).

142. $\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2} dx$ (выделить алгебраич. часть).

143. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx$ (выделить алгебраич. часть).

Интегрирование иррациональных функций.

144. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

145. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}.$

146. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x}}$

147. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}.$

148. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

149. $\int \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}\,dx.$

150. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$

151. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}.$

152. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x-1}}\,dx$

153. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

154. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

155. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}}.$

156. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}.$

157. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

158. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

159. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx.$

150. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

161. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$

162. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-ax}}.$

163. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}.$

164. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}.$

165. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

166. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx.$

167. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx.$

168. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx.$

169. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx.$

170. $\int x^2\sqrt{x^2+2}\,dx.$

171. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

172. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2x+4}}.$

173. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}.$

174. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}.$

175. $\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx$

176. $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}.$

177. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2x-1}}.$

178. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2}\,dx.$

179. $\int \sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{2+x^2}.$

180. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx.$

181. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$

182. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$.

183. $\int \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{(x-1)^3}\, dx$.

184. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

185. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$.

186. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^{3/2}}$.

187. $\int \frac{dx}{(x^2 + 3)^{3/2}}$.

188. $\int \frac{(3x + 2)\, dx}{(x^2 + 4x + 1)^{3/2}}$.

189. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$.

190. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2}\, dx$.

191. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^2}}$.

192. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$.

193. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$.

194. $\int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}\, dx$.

195. $\int \sqrt[3]{x(1 - x^3)}\, dx$.

Интегрирование трансцендентных функций.

196. $\int sin^9 x\, dx$.

197. $\int cos^6 x\, dx$.

198. $\int \frac{dx}{cos^5 x}$.

199. $\int \frac{dx}{sin^6 x}$.

200. $\int sin^3 x\, cos^2 x\, dx$.

201. $\int sin^7 x\, cos^9 x\, dx$.

202. $\int sin^6 x\, cos^4 x\, dx$.

203. $\int \frac{sin^7 x\, dx}{cos^3 x}$.

204. $\int \frac{sin^4 x}{cos^2 x}\, dx$.

205. $\int \frac{cos^4 x}{sin^3 x}\, dx$.

206. $\int \frac{dx}{sin^3 x\, cos x}$.

207. $\int \frac{dx}{sin^4 x\, cos^4 x}$.

208. $\int \frac{dx}{sin^7 x\, cos^3 x}$.

209. $\int \frac{dx}{sin^5 x\, cos^5 x}$.

210. $\int \frac{dx}{sin^3 x\, cos^4 x}$.

211. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{sin^3 x\, cos^5 x}}$.

212. $\int \frac{dx}{\sqrt{sin x\, cos^3 x}}$.

213. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{sin x\, cos^9 x}}$.

214. $\int \sqrt{cos^5 x}\, sin x\, dx$.

215. $\int \frac{sin^3 x\, dx}{\sqrt[5]{cos x}}$.

216. $\int tg^5 x\, dx$.

217. $\int \frac{dx}{tg^6 x}$.

218. $\int cotg^5 x\, dx$.

219. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tg x}}$.

220. $\int \frac{dx}{1 + tg\, x}$

221. $\int \frac{dx}{4 + 3\, tg x}$.

222. $\int \frac{\sin x\, dx}{1 + tg\, x}$.

223. $\int \frac{1 + tg^2 x}{1 - tg^2 x}\, dx$.

224. $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x - 4}$.

225. $\int \frac{dx}{tg\, x \sqrt[3]{\cos 2x}}$.

226. $\int \frac{1 + tg\, x}{\sin 2x}\, dx$.

227. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

228. $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}$.

229. $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

230. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\, dx$.

231. $\int \frac{3 \cos x + 4 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x}\, dx$.

232. $\int \frac{\sin 2x}{(\cos 2x)^{1/3}}\, dx$.

233. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin 2x}}$.

234. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

235. $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$.

236. $\int \frac{\sin 3x}{\cos x}\, dx$.

237. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x \cos 3x}$.

238. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin 4x}$.

239. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}\, dx$.

240. $\int \frac{\cos 3x}{\cos^5 x}\, dx$.

241. $\int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x}\, dx$.

242. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^5 x}\, dx$.

243. $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$, если $a^2 > b^2$ и $a^2 < b^2$.

244. $\sqrt{1 + \sin x}\, dx$. *Указание.* $1 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$.

245. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$.

246. $\int \frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2}\, dx$.

247. $\int \sin \lg x\, dx$.

248. $\int \sin x \lg tg\, x\, dx$.

249. $\int \frac{\lg tg\, x}{\sin^2 x}\, dx$.

250. $\int \frac{\lg \cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

251. $\int \cos x \sin 3x\, dx$.

252. $\int x\, cotg\, x\, dx$.

253. $\int \cos x \cos 3x \cos 5x\, dx$.

254. $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{12}\, dx$.

255. $\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx$.

256. $\int x^2 \sin x\, dx$.

257. $\int 2^x \cos x\, dx$.

258. $\int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x\, dx$.

259. $\int e^x \sin 3x\, dx$.

260. $\int x^2 \cos x\, e^x\, dx$.

261. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$.

262. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}$.

263. $\int x e^{x^2} (x^2 + 1)\, dx$.

264. $\int \frac{x e^x}{(1 + x)^2}\, dx$.

265. $\int \lg^3 x\, dx$.

266. $\int \lg (1 + x^4)\, dx$.

267. $\int \frac{\lg x}{(2x+5)^3}\, dx.$

268. $\int \frac{\lg (x+1)}{(x+1)^3}\, dx.$

269. $\int \frac{\lg (x^2-x+1)}{x^2}\, dx.$

270. $\int \frac{x \lg x}{(x^2-1)^{3/2}}\, dx.$

271. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \lg \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx.$

272. $\int \lg(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\, dx.$

273. $\int \lg (x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$

274. $\int (\arcsin x)^2\, dx.$

275. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{x^2}.$

276. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

277. $\int \operatorname{arctg} \frac{a}{x-a}\, dx.$

278. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3}\, dx.$

279. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\, dx.$

280. $\int \frac{a+b \operatorname{ch} x}{a \operatorname{ch} x+b}\, d.$

281. $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch}^2 x)^2}.$

282. $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2}.$

283. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x\, dx}{1-\operatorname{th} x}.$

284. $\int \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}\, dx$

285. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}}.$

286. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}.$

287. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 3x\, dx$

288. $\int \operatorname{th}^5 x\, dx.$

289. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\, dx$

Простейшие приложения интегрального исчисления к геометрии.

Вычисление площадей.

Найти площадь, ограниченную кривою:

290. $y = x \sin x$ и осью OX в пределах для x от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

291. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и осью OX в пределах для x от 0 до $\frac{1}{2}$.

Найти площадь, ограниченную кривой:

292. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

293. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$ (подэр эллипса).

294. $a^2 y^4 = x^4 (a^2-x^2)$.

295. Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривыми: 1) $x = t - \sin t;\ y = 1 - \cos t$ и 2) $x^2+y^2-2\pi x-2y+\pi^2=0$.

296. Найти площадь первого сегмента, отсекаемого от кривой
$y = x + \sin x$ прямою $y - x = 0$.

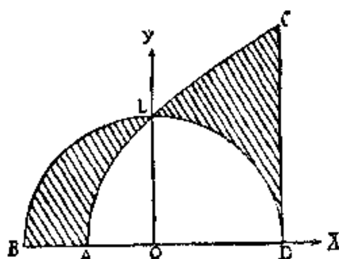
297. Найти величины площадей ABL и LCD, заключающихся между окружностью BLD, уравнение которой $x^2+y^2=4a^2$, параболою ALC, уравнение которой $y^2=4a(a+x)$, и касательной в точке D к окружности (черт. 38).

298. Найти площадь, заключенную между кругом $x^2+y^2=4px$ и параболой $y^2=2px$.

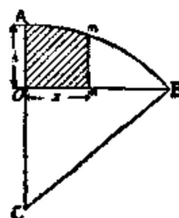
299. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$y^2=2px,\ y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

300. Дан полусегмент AOB круга радиуса r и высотою h (где $h<r$). Найти площадь части $AOmn$, если mn проведено параллельно AOC на расстоянии x (черт. 39).



Черт. 38.



Черт. 39.

301. Найти площадь сечения поверхности $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}$ плоскостью $x-y-z=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

302. Найти площадь, ограниченную кривой $x=\frac{c^2}{a}\sin^3\varphi$, $y=\frac{c^2}{b}\cos^3\varphi$.

Найти площадь, ограниченную кривой.

303. $r^2=a^2\cos 2\theta$ (лемниската).

304. $r^2=a^2\frac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$ и прямыми $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{3}$.

305. $r=a\cos 2\theta$. Вычертить кривую.

306. $r=a\cos 3\theta$. Вычертить кривую.

307. Найти площадь, ограниченную улиткой Паскаля $r=2a(2+\cos\theta)$.

308. Зная, что $r^2=\frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ есть полярное уравнение равнобочной гиперболы с полуосями, равными a, найти площадь гиперболического сектора между двумя радиусами-векторами, составляющими равные углы φ по обе стороны вещественной оси.

Вычисление длины дуг.

309. $y=a\lg\cos\frac{x}{a}$ от точки $(0,0)$ до $(x_0,\ y_0)$.

310. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

311. $y=\frac{x-3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$ от точки $(0,0)$.

312. $y^2=2px$ в пределах для y от 0 до y_0.

313. $y^2=px^3$ в пределах для y от 0 до y_0.

314. $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$ в пределах для $x=p$ и $x=\frac{5}{2}p$.

315. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (астроида).

316. Найти длину дуги эволюты эллипса: $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$.

317. Найти длину дуги кривой $x = a \cos^5 t$ $y = a \sin^5 t$ в пределах первого координатного угла.

Найти длину дуг кривых.

318. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ от точки $(0, 0, 0)$.

319. $z^2 - 2ax = 0$, $9y^2 - 16xz = 0$ от точки $(0, 0, 0)$.

320. Найти длину дуги кривой, по которой пересекаются поверхности $4ax = (y + z)^2$ и $\frac{4}{3} x^2 + y^2 = z^2$, считая за начало дуги точку $(0, 0, 0)$.

321. Найти длину дуги кривой, по которой пересекаются поверхности $x^2 + y^2 = cz$ и $\frac{y}{x} = tg \frac{z}{c}$, от точки $(0, 0, 0)$.

322. На сферической поверхности, уравнение которой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, начерчена линия, проекция которой на плоскость XOY имеет полярное уравнение $r = \frac{2a}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$, если ось OX принять за полярную ось. Найти длину дуги этой кривой от точки $(a, 0, 0)$.

Вычисление объемов.

Найти объем тела, полученного от вращения фигуры:

323. $xy^2 = 1 - x$ вокруг оси OX в пределах для x от $\frac{1}{2}$ до 1 и вокруг оси OY в пределах для y от -1 до $+1$.

324. $xy = a^2$ (одной ветви) вокруг оси O_1Y_1, пересекающей рассматриваемую ветвь гиперболы и проведенной параллельно оси OY на расстоянии p, в пределах для y от $y_0 = \frac{a^2}{p}$ до $y = q$.

325. Найти объем тела, происшедшего от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми: $y = x + a \sin \frac{2\pi x}{n}$ и $2x^2 = ny$.

326. Найти объем тела, происшедшего от вращения вокруг оси OY сегмента, отсекаемого от параболы $y^2 = 2x$ прямою $2y = (2x - 1)\sqrt{3}$.

327. Найти объем параболической зоны, происшедшей от вращения дуги параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси OY в пределах для y от y_0 до y.

328. Найти объем эллиптической зоны, происшедшей от вращения дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси a в пределах для x от x_0 до x.

329. Найти объем гиперболической зоны, происшедшей от вращения дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг вещественной оси в пределах для x от x_0 до x.

330. Найти объем гиперболической зоны, происшедшей от вращения дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг мнимой оси в пределах для y от y_0 до y.

331. Эллипс AB с полуосями $OA = a$ и $OB = b$ вращается около большой оси OX. Определить объем эллиптического сектора $OCAD$, если его высота AE равна h (черт. 40).

Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

332. $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$.

333. $x^2+y^2-ax=0$, $x-z=0$ и $x+z=0$.

334. $y^2=2p(a-x)$; $x-z=0$; $x-2z=0$.

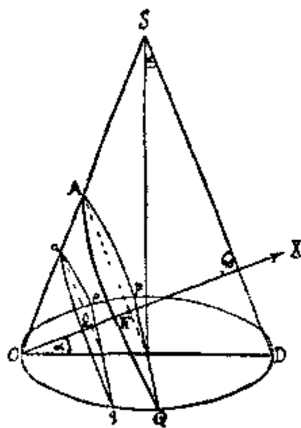
335. $z^2+x+y=a$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$.

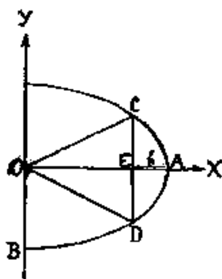
336. $z^2=b(a-x)$; $x^2+y^2-ax=0$.

337. $x^2+y^2-z^2=0$; $x^2+y^2-z^2=1$; $z=-1$; $z=+1$.

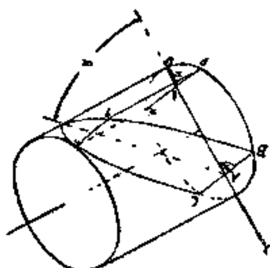
338. $z=0$; $by=x(a-z)$; $by=-x(a-z)$; $x=b$ (клинообразное тело).

339. В прямой круговой цилиндрический стакан радиуса r, плоскость основания которого наклонена к горизонту под углом α, налита вода. Уровень воды BAC находится на данном расстоянии $AO=a$ от нижайшей точки O стакана, при чем $0 \leqslant a \leqslant 2r$. Определить объем воды в стакане (черт. 41).





Черт. 40.



Черт. 41.

Черт. 42.

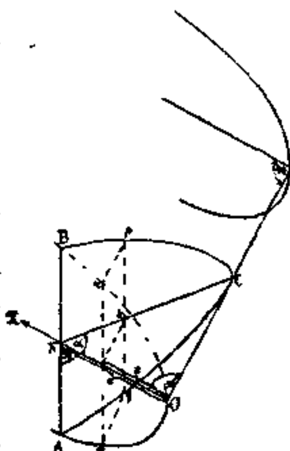
Указание: сечение плоскостью, перпендикулярною к OX, дает прямоугольник $mnqp$, площадь которого определяется в функции расстояния $Ok=x$.

340. Прямой круговой конус радиуса r и высоты h рассечен на две части плоскостью APQ, проходящею через центр кругового основания C параллельно образующей SD. Найти объемы обеих частей, если диаметры OD и PQ взаимно перпендикулярны (черт. 42).

Указание: сечение плоскостью параллельно плоскости APQ дает параболу apq. Площадь apq может быть выражена в функции расстояния $Ok=x$ плоскости apq от точки O по нормали OX к SD.

341. Прямой цилиндр с параболическим основанием $y^2=2px$ пересечен плоскостью ABC под углом α к оси OX параболического основания. Зная, что линия пересечения AB перпендикулярна к оси OX и отрезок $\overline{OK}=a$, найти объем части $ABCO$ (черт. 43).

Указание: сечение $mnpq$ есть прямоугольник.

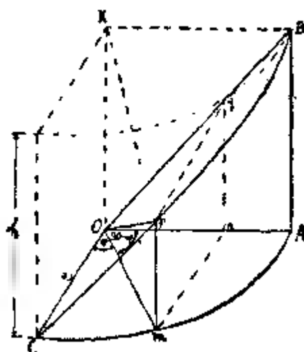


Черт. 43.

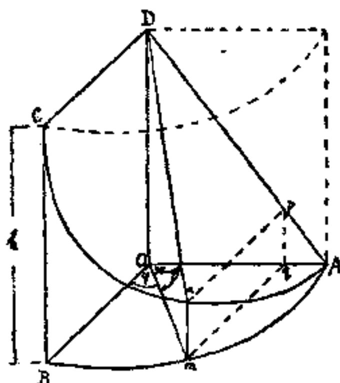
342. Четверть объема прямого кругового цилиндра радиуса r и высоты h разделена плоскостью

BOC на две части: нижнюю (объема V) и верхнюю (черт. 44). Нижняя часть в свою очередь разделена на две части: правую и левую (объема V_1) плоскостью, проходящею через ось цилиндра и составляющею угол $COm = \varphi$ с гранью CK. Определить объемы: 1) всей нижней части V — объему $BAOC$, 2) левой части V_1 — объему $pOCm$.

Указание: сечение плоскостью, параллельною грани KC, есть прямоугольник (например, $mpqn$).



Черт. 44.

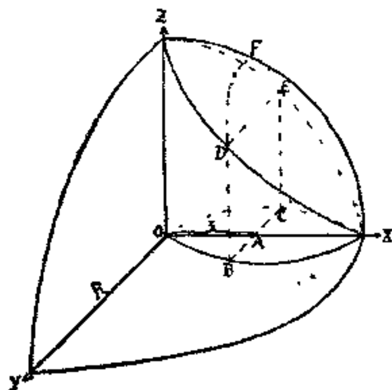


Черт. 45.

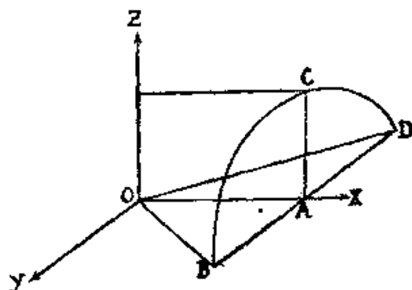
343. Четверть объема прямого кругового цилиндра радиуса r и высоты h разделена плоскостью ACD на две части: нижнюю (объема V) и верхнюю. Нижняя часть в свою очередь разделена на две части: правую и левую (объема V_1) плоскостью, проходящею через ось цилиндра и составляющею угол $BOm = \varphi$ с гранью BD. Определить объемы: 1) всей нижней части V и 2) левой части V_1 (черт. 45).

Указание: сечение плоскостью, параллельною грани BD, есть прямоугольник (например, $mnpq$).

344. Найти объем, общий шару радиуса R и прямому круговому цилиндру диаметра R, если центр шара лежит на поверхности цилиндра (черт. 46).



Черт. 46.



Черт. 47.

Указание: сечение параллельно ZOY состоит из прямоугольника $BDEC$ и сегмента DFE. Площадь этого сечения можно выразить в функции от x.

345. Найти объем коноида, образованного движением прямой, остающейся все время параллельной плоскости XOY и скользящей одним концом по оси OZ, а другим по дуге эллипса BCD с полуосями $AB = b$ и $AC = c$, расположенного в плоскости, параллельной ZOY, с центром A на оси OX в расстоянии $AO = l$ от 0. Уравнение поверхности коноида $\frac{c^2 l^2 y^2}{b^2} = x^2 (c^2 - z^2)$ (черт. 47).

Вычисление поверхностей.

Найти поверхность тела, происшедшего от вращения кривой:

346. $x^2 + y(y - 2b) = 0$ вокруг оси OY.

347. $y = \sin x$ вокруг оси OX в пределах для x от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

348. $y^2 = 2px$ вокруг оси OX.

349. $y^3 = px^2$ вокруг оси OX в пределах для y от 0 до y_0.

350. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > b$, вокруг оси абсцисс OX (продолговатый эллипсоид).

351. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, вокруг оси ординат OY (сжатый эллипсоид).

352. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси OX.

353. Найти поверхность части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, заключающейся внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 8$.

Двойные интегралы.

Вычисление площадей.

Вычислить площади, ограниченные следующими линиями (все входящие в уравнения параметры a, b и т. п. считаются положительными).

354. $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$.

355. $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(a > b,\ \alpha > \beta)$.

356. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y = m$, $y = n$, $x > 0$ $(a > b,\ m > n)$.

357. $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = m$, $y = n$ $(a > b,\ m > n)$.

358. $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$ $(m > n,\ \alpha > \beta)$.

359. $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$, $x > 0$, $y > 0$ $(a > b,\ \alpha > \beta)$.

Моменты инерции и центры инерции плоских фигур.

Вычислить моменты инерции однородных плоских фигур, ограниченных следующими линиями (масса всей фигуры предполагается данною и равною M).

360. $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$ — относительно прямой $y = 0$.

361. $y^2 = 2px$, $2px = h^2$ — относительно прямой $y = 0$.

362. $y^2 = 2px$, $x = h$ — относительно прямой $x = h$.

Вычислить координаты центра инерции однородных плоских фигур, ограниченных следующими линиями:

363. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x = 0$, $y = 0$.

364. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$, $x = \pi a$.

Вычисление объемов.

Вычислить объемы, ограниченные следующими поверхностями:

365. $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$.

366. $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, $y + z = R$, $z = 0$.

367. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.

368. $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.

369. $z^2 = 2px$, $y^2 = 2q(a - x)$.

370. $x^2z^2 + a^2y^2 = c^2x^2$, $x = 0$, $x = a$.

371. $y^2 + z^2 = x$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

372. $z = x + y + 1$, $y + 1 = x^2 - x$, $x + y = 1$.

373. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $x = 0$.

374. $z = \cos x \cos y$, $x + y = \frac{\pi}{2}$, $x - y = \frac{\pi}{2}$, $-x - y = \frac{\pi}{2}$,

$-x + y = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$.

375. $x^2 + y^2 = cz$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$.

376. $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$.

377. $x^2 + y^2 = az^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$.

378. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

379. $x^2 + y^2 = az$, $x + z = 2a$.

380. $x^2 + y^2 = 2pz$, $x + y + z = a$.

381. $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$.

382. $xy = az$, $x + y + z = a$, $z = 0$.

383. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

384. $cz = xy$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

Площади кривых поверхностей.

Найти площадь части поверхности:

385. $x^2 + y^2 = 2ax$, вырезанной поверхностью: $y^2 = 2px$.

386. $z^2 = 2xy$, вырезанной поверхностями: $x = a$, $y = b$, $z = 0$.

387. $z^2 = 2px$, вырезанной поверхностями: $y^2 = 2qx$, $x = a$

388. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной поверхностью: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$.

389. $y^2 = 4x$, вырезанной поверхностью: $x^2 + y^2 + z^2 = 5z$.

390. $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной поверхностью: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

391. $(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + z^2 = a^2$, вырезанной плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Тройные интегралы.

Вычисление объемов.

Вычислить объемы, ограниченные следующими поверхностями.

392. $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2 tg^2\alpha$, $x^2+y^2=z^2 tg^2\beta$ $(\alpha>\beta)$.

393. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. **394.** $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$.

395. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

396. $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$.

397. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2=1$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h$.

398. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1$.

399. $|a_1x+b_1y+c_1z|+|a_2x+b_2y+c_2z|+|a_3x+b_3y+c_3z|=1$.

Моменты инерции и центры инерции объемов.

Вычислить моменты инерции однородных тел, ограниченных следующими поверхностями (при массе тела $=M$).

400. $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, $z=H$ — относительно оси z.

401. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — относительно оси z.

402. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ — относительно оси z.

Вычислить координаты центра инерции однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

403. $z^2=xy$, $x=a$, $y=b$, $z=0$.

404. $z=c\cdot\frac{a-x}{a}\cdot\frac{b-y}{b}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

405. $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, $z=H$.

ОТДЕЛ VI.

Интегрирование уравнений.

Нахождение функций нескольких переменных по полным их дифференциалам.

1. $dz = (2x\cos y - y^2 \sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)\,dy.$

2. $dz = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1 + x^2}\,dy.$

3. $dz = \frac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2}.$

4. $dz = \frac{(3y - x)\,dx + (y - 3x)\,dy}{(x + y)^3}.$

5. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy.$

6. Определить число n так, чтобы выражение $\frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{(x^2 + y^2)^n}$ было полным дифференциалом некоторой функции u, которую требуется определить.

7. Определить постоянные a и b так, чтобы выражение

$$\frac{(y^2 + 2xy + ax^2)\,dx - (x^2 + 2xy + by^2)\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

было полным дифференциалом некоторой функции z, которую требуется определить.

8. $dv = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x}{z^2}\,dz.$

9. $dv = \frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\left\{(y^2 + z^2 - xy - zx)\,dx + (z^2 + x^2 - yz - yx)\,dy + (x^2 + y^2 - zx - zy)\,dz\right\}.$

10. Определить постоянные a, b, c; a', b', c' так, чтобы выражение

$$\frac{(x + y + 2z)\,dx + (ax + by + cz)\,dy + (a'x + b'y + c'z)\,dz}{(x + y + z)^3}$$

было полным дифференциалом некоторой функции, которую требуется определить

Уравнения, левая часть которых есть полный дифференциал.

11. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$

12. $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0.$

13. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$

14. $xdx + ydy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0.$

15. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = 0.$

16. $(1+e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0.$

17. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0.$

18. $\left\{\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right\}dx + \left\{\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right\}dy = 0.$

Уравнения с отделяющимися переменными.

19. $\frac{x\,dx}{1+y} - \frac{y\,dy}{1+x} = 0.$

20. $y'\sin x = y\log y.$

21. $(1+e^x)\,yy' = e^x.$

22. $(a^2+y^2)\,dx = 2x\sqrt{ax-x^2}\,dy.$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}.$

24. $(1+x^2)\,y^3\,dx + (1-y^2)\,x^3\,dy = 0.$

25. $y^2dx + (xy-1)\,dy = 0.$

26. $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0.$

27. $y' = \sin(x-y).$

26. $2y' + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0.$

29. $xy^2\,(xy'+y) = a^2.$

30. $(x^2-y^4)\,y' - xy = 0.$ *Указание:* положить $y = tx.$

31. $(y-x)\sqrt{1+x^2}\,dy = (1+y^2)^{3/2}\,dx.$

Указание: положить $x = tg\,v;\ y = tg\,u.$

32. $y' = (ax+by+c)^2.$

Уравнения линейные и приводящиеся к линейным.

33. $xy' - y + \frac{x^2}{(x-1)^2} = 0.$

34. $y' - 3x^2y = x^5 + x^2.$

35. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

36. $y' - \frac{y}{\sin x} = tg\,\frac{x}{2}.$

37. $y' + ay = e^{mx}.$

38. $y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n.$

39. $y' + y\cos x = \sin x\cos x.$

40. $y' + \frac{y}{x} = 2\log x + 1.$

41. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

42. $x(1-x^2)\,y' + (2x^2-1)\,y = ax^2.$

43. Найти решение уравнения $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 1$, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 0$.

44. Найти интегральную кривую уравнения $y' + x^2y = x^2$, проходящую через точку M (2, 1).

45. Найти решение дифференциального уравнения $y' + x^2y + x^5 = 0$, которого наибольшее значение в промежутке $(-\infty, +\infty)$ равно 3.

46. Определить параметр λ под условием, чтобы значение решения уравнения $y' + \lambda yf(x) = 0$ при $x = x_2$ было вдвое больше значения его при $x = x_1$. Исследовать пример. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_2 = 2$; $x_1 = 1$.

47. Доказать, что интегральные кривые уравнения
$x(x-a)y' - -(x+a)y + b^2 - 0$
суть гиперболы, одна из асимптот которых постоянна, а другая проходит через постоянную точку.

48. $3y^2y' - ay^3 = x + 1.$ **49.** $xy' - x^4e^{-y} - 2.$

50. $y' - 1 = e^{x+2y}.$ **51.** $xy' + 1 = e^y.$

52. $y' + tg\, y = \frac{x}{\cos y}.$ **53.** $ydx + (y^2 - 2x)dy = 0.$

54. $dx + (x + y^2)dy = 0.$ **55.** $2ydx - (y^2 - 6x)dy = 0.$

56. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)dx + 2(y-1)dy = 0.$

57. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0.$

58. $(1 - x^2)y' - xy = axy^2$ **59.** $y' + 2xy = 2x^5y^3.$

60. $y^{n-1}(ay' + y) = x.$ **61.** $xy' + y - y^2 \log x.$

62. $dy + (xy - xy^3)\, dx\ \ 0.$ **63.** $y'\ \ \frac{1}{3} y \sin x + y^4 \sin x = 0$

64. $y' = 9x^2y + (x^5 + x^2)\sqrt[3]{y^2}.$ **65.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

66. $y\, dy - \frac{ay^2}{x^2}dx = \frac{bdx}{x^3}.$ **67.** $(xy + x^2y^3)y' = 1.$

Указание: задачи 58 — 67 — уравнения *Бернулли.*

В задачах 68 — 71 требуется определить функцию y:

68. $\frac{ax}{a+x}\int_0^x y\, dx = \int_0^x xy\, dx.$ **69.** $\int_0^x xy\, dx\ \ x^2 + y.$

70. $\int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\sqrt{x} - y.$ **71.** $\int_0^x y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = x + \frac{1}{2}y^2.$

Указание: продифференцировать по x.

Уравнения однородные и приводящиеся к однородным.

72. $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0.$ **73.** $(x + y)dx + (y - x)dy - 0.$

74. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx\ \ 0.$

75. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0.$

76. $x(x - 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ **77.** $x\, dy - y\, dx = ydy.$

78. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$ **79.** $(x - xy - y^2)dx\ \ y^2 dy = 0.$

80. $y^2\, dx + (x^2 - xy)\, dy = 0.$ **81.** $(x^2 + xy\ \ y^2)dx\ \ x^2 dy.$

82. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx\ \ (2x^2 + 3xy)dy = 0.$

83. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$ **84.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$

85. $x\, dy - y\, dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$ **96.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$

87. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - x\, dy = 0.$ **88.** $y\, dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$

89. $xdy - ydx = y\log\left(\frac{y}{x}\right)dx.$

90. $xy\, dy - [y^2 + (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}]\, dx = 0.$

91. $xy' = y \log \frac{y}{x}.$

92. Найти интегральные кривые уравнения $xy' = 3y - 2x - 2(yx - x^2)^{1/2}$, проходящие через точку M (1,1).

93. $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$.

94. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

96. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$.

96. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

97. Доказать, что интегральные кривые уравнения $(ax + by + c)\,dx + (ay - bx + c')\,dy = 0$, суть логарифмические спирали.

Интегрирующий множитель.

Интегрировать уравнения, имеющие множитель вида $\mu = f(x)$.

98. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

99. $(x^2 + y^2)(x\,dy - y\,dx) = (a + x)x^4\,dx$.

100. $(1 - x^2y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0$.

101. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$.

Интегрировать уравнения, имеющие множитель вида $\mu = f(y)$.

102. $(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

103. $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.

104. $y\cos^3 y\,(1 - y\sin x)\,dx - (y^2 + x\cos^2 y)\,dy = 0$.

Интегрировать уравнения, имеющие множитель одной из двух форм $\mu = f(x + y)$ или $\mu = f(xy)$.

105. $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0$.

105. $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)\,dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)\,dy = 0$.

107. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0$. Множитель вида $\mu = f(x^2 - y^2)$.

108. $(y + x^2)\,dy + (x - xy)\,dx = 0$. Множитель вида $\mu = f(x^2 + y^2)$.

Уравнения 1-го порядка, не решенные относительно y'.

109. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

110. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 - x^2y^2 + x^4 = 0$.

111. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)\,y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\,y' - x^3y^3 = 0$.

112. $(xy' - y)^2 - 2xy(1 + y'^2) = 0$.

113. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

114. $xy'^2 + 2yy' - x = 0$.

115. $x^3y'^2 + 3xyy' + 3y^2 = 0$.

116. $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^2 = 0$.

117. $y'^3 - 3y' + 1 = 0$.

118. $y = y'^2 + 2y'^3$.

119. $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$.

120. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$.

121. $y\sqrt{1 + y'^2} = y'$.

122. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$.

123. $x(1 + y'^2) = 1$.

124. $x(1 + y'^2)^{3/2} = a$.

125. $x = ay' + by'^2$.

126. $x = y'^3 + 1$.

127. $xy'^3 = 1 + y'$.

128. $x = \frac{ay'}{\sqrt{1 - y'^2}}$.

129. $y'^2 - 2xy' - 1 = 0$.

130. $y = xy' + y'^2$.

131. $y = xy' + y' - y'^2$.

132. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

133. $y^2 - 2xyy' + (1 + x^2)\,y'^2 = 1$.

134. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

135. $y = xy' + ax\sqrt{1 + y'^2}$.

136. $y = 2xy' + y^2y'^3$.

137. $4y'^3 - 6y'^2 + 9(y - x) = 0$.

138. $y\sqrt{1+y'^2}=a(x+yy')$. 139. $y=xy'^2+y'^2$.
140. $y=x(1+y')+y'^2$. 141. $y=2xy'-y'^2$.
142. $(4x^2-a^2)y'^2-4xyy'+y^2-a^2=0$.
143. $y=2xy'+\sqrt{1+y'^2}$. 144. $y=x+xy'+xy'^2$.
145. $y(y'^2+1)=x+yy'$.

146. Найти интегральную кривую уравнения $y'^2+2xy'+2y=0$, которая пересекает ось OY под углом 45°.

147. Найти интегральную кривую уравнения $2yy'=x(y'^2+1)+y'^4-3y'^2$, проходящую через точку $(0,-1)$ и имеющую в этой точке касательную, параллельную оси OX.

148. Найти интегральные кривые уравнения $y=2xy'-y'^2$, проходящие через заданную точку (x_0, y_0). Найти условие возможности задачи.

Указание. задачи 130—148 — уравнения *Клеро* и *Лагранжа*.

Найти особенные решения следующих уравнений.

149. $y=xy'+y'-y'^2$.
150. $(xy'-y)^2=x^3(2y-xy')$.
151. $(xy'+y)^2+3x^5(xy'-2y)=0$.
152. $2xy(1+y'^2)-(xy'+y)^2=0$.
153. $x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0$.
154. $(y-xy')(ay'-b)=ab\,y'$.
155. $y'^3-xyy'+\frac{2x^6}{729}=0$.
156. $y'^2-yy'+e^x=0$.
157. $y=xy'+\sqrt{a^2-b^2y'^2}$.
158. $y'^2-2x\sqrt{y}y'+4y\sqrt{y}=0$.
159. $xy^2y'^2-y^3y'+a^2x=0$.

Найти особенные решения в задачах: 118, 119, 120, 121, 130, 131, 132, 134, 136, 137, 139.

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

160. $y''=x+\sin x$.
161. $(y'')^2=y'$.
162. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$.
163. $ay''+(1+y'^2)^{3/2}=0$.
164. $ay'''=y''$.
165. $y'(1+y'^2)=ay''$.
166. $y'''-y''^2=0$.
167. $y'''=(y'')^3$.
168. $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$.
169. $y'y'''-3y''^2=0$.
170. $y'^2+2yy''=0$.
171. $3y''=y^{-5/3}$.
172. $2(2a-y)y''=1+y'^2$.
173. $y''=ae^y$.
174. $yy''^2=1$.
175. $yy''=y'^2$.
176. $yy''+y'^2=1$.
177. $2yy''-3y'^2=4y^2$.
178. $1+y'^2=2yy''$.
179. $2yy''+y'^2+y'^4=0$.
130. $2y'^2=(y-1)y''$.
181. $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$.
182. $yy'y''=y'^3+y''^3$.

183. Найти решение уравнения $y^3y''+1=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y=1$, $y'=0$ при $x=1$.

184. Найти интегральную кривую уравнения $y''\sqrt{1-y}=-1$, которая в точке (0,1) имеет касательную, параллельную оси OX.

165. Найти решение уравнения $y''\pm ky'^2=g$, удовлетворяющее условиям $y=a$; $y'=0$ при $x=0$ (k и g положительные постоянные).

186. Найти решение уравнения $y'' + n^2 y - \frac{k}{y} y'^2 = 0$, удовлетворяющее условиям $y = a$; $y' = 0$ при $x = 0$ (n^2 и k положительные постоянные; $k < 1$).

187. $y'^2 - 2xy'' + x^2 - y^2 = 0$.

188. $x^4 y' = (xy' - y)^3$.

189. $x^3 y' = (y - xy')^2$.

190. $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$.

191. $x^4 y'' = (x^3 + 2xy) y' - 4y^2$.

192. $x^2 yy'' - 2x^2 y'^2 + xyy' + y^2 = 0$.

193. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

194. $x^2 (yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2 y'^2 + y^2}$.

195. Найти функции вида $z = \varphi(x^2 + y^2)$, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial^2 x\, \partial^2 y} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

196. Найти решение уравнения $\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, имеющее вид $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$.

Линейные уравнения высших порядков.

197. $xy'' + y' = 0$.

198. $(1 + x^2)\, y'' - 2xy' = 0$.

199. $2xy'' = y' - mx$.

200. $xy'' + y' = 3x + 1$.

201. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

202. $y^{(5)} + y^{(4)} - 14y''' - 28y'' + 8y' + 32y = 0$.

203. $y^{(6)} - 2y^{(5)} + 3y^{(4)} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

204. $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1} y' + y = 0$.

205. $y^{(n)} + y^{(n-1)} + y^{(n-2)} + \ldots + y' + y = 0$.

206. $y^{(n)} - a^n y = 0$.

207. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 1 + x + x^2$.

208. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

209. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

210. $y'' + a^2 y = e^x$.

211. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 96xe^{2x}$.

212. $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 48xe^x$.

213. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12x^2 e^{3x} - e^{2x}$.

214. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

215. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8 \cos ax$.

216. $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$.

217. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$.

218. $y'' - 2y' + y = e^{x} \sin x + 4e^x$.

219. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.

220. $y^{IV} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = x \cos 2x$.

221. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{(\cos 2x)^3}}$.

222. Найти интегральную кривую уравнения $y'' - k^2 y = 0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся в этой точке прямой $y = ax$.

223. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + k^2 y = 0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся в этой точке прямой $y = ax$.

224. Найти решение уравнения $y'' + 2hy' + n^2y = 0$, удовлетворяющее условиям $y = a$; $y' = c$ при $x = 0$.

225. Найти решение уравнения $y'' + n^2y = h \sin px$, удовлетворяющее условиям $y = a$; $y' = c$ при $x = 0$.

226. Найти решение уравнения $y''' - y'' - y' + y = (24x \quad 4) e^x + 3x$, удовлетворяющее условиям $y = 1$; $y' = -1$; $y'' = 0$ при $x = 0$.

227. Найти решение уравнения $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \frac{\pi}{2} + 4\cos x$, удовлетворяющее условиям $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = \pi$.

228. Найти значения параметра ρ, при которых уравнение $y'' - \rho^2 y = 0$ имеет решения, удовлетворяющие условиям $y'(0) = y'(1)$; $y(0) = -y(1)$; найти и эти решения.

229. Найти значения параметра ρ, при которых решение уравнения $y'' + \rho y = 0$ удовлетворяет условиям: $y'(0) = y'(1)$; $2y(0) \quad -y(1)$; найти и эти решения.

230. $x^2y''' = 2y'$.

231. $x^3 y''' + xy' - y = 0$.

232. $x^4 y^{IV} - y = 0$.

233. $x^2y'' + xy' + y = x$.

234. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} - \frac{2}{x}$.

235. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

236. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$.

237. $(3x + 2)^2 y'' + 7(3x + 2) y' + 63x = 18$.

238. $x^2y'' - 4xy' + 6y = ax + \frac{b}{x}$.

239. $x^4y^{IV} + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' + y = x^2$.

240. $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 6 \log x$.

241. $x^3y'' - x^2y' - 3xy + 16 \log x = 0$.

242. $(x + 1)^2 y'' + (x + 1) y' + y = 2\sin \log \frac{1}{1 + x}$.

Указание. задачи 221 — 233 — уравнения *Эйлера*.

243. Найти значения параметра ρ, при которых существует решение уравнения $x^2y'' - \rho(\rho - 1) y = 1$, удовлетворяющее условиям:

$$\int_0^1 yx\,dx = 0, \quad \int_0^1 yx^2\,dx = 0.$$

244. $x^2y'' + 2n\,xy' + [n(n - 1) - h^2x^2]\, y = 0$.

245. $y'' - 4n\,xy' + (2a + 4n^2x^2)\, y = 0$.

Указание: в задачах 244 и 245 положить $y = uv$ и выбрать u так, чтобы коэффициент при v' обратился в 0.

246. $xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0$.

247. $y'' - y' + ye^{2x} \quad 0$.

248. $y^4y'' + 2x^3y' + n^2y = 0$.

249. $y'' + \frac{2x}{(1 + x^2)} y' + \frac{y}{(1 + x^2)^2} = 0$.

250. $(1 - x^2)\, y'' - xy' + n^2y = 0$.

251. $y'' + 2\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} y' + \frac{4m^2}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} y = 0$.

252. $y'' - \frac{1}{\sin x \cos x} y' + m^2y \,.\, \operatorname{tang}^2 x = 0$.

Указание: в задачах 246 — 252 ввести вместо x новую переменную независимую $t = \varphi(x)$ и выбрать $\varphi(x)$ так, чтобы коэффициент при y'_t обратился в 0.

253. $y'' - y'(1 + 2e^x) + ye^{2x} = 0$. Положить $x = \log t$.

254. $y'' + (e^y - x)\, y'^3 = 0$. Принять за переменную независимую y.

255. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$. Частное решение $y = \frac{\sin x}{x}$.

256. $x(2-x)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0$. Частное решение $y = x^2$.

257. $x^2(\log x - 1)y'' - xy' + y = 0$. Частное решение $y = x$.

258. $xy'' - (1+x)y' + y = 0$. Частное решение $y = 1 + x$.

259. $y'' + (tg\, x - 2\cot x)y' + 2\cot^2 x \cdot y = 0$. Частное решение $y = \sin x$.

260. $y'' - 4y\frac{\sin 3x}{\sin^3 x}$ Частное решение $y = \sin^4 x$.

261. $x(1-x)^2 y'' = 2y$. Частное решение $y = \frac{x}{1-x}$.

262. $xy''' - (x^2+2)y'' - xy' + (x^2+2)y = 0$.

263. $(1+x^2)y'' + xy' - n^2 y = 0$. Частное решение $y = (x + \sqrt{x^2+1})^n$.

264. Уравнение $(1+x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$ допускает частное решение $y = x^2$. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $y = 0$; $y' = 0$ при $x = -1$.

265. Интегрировать уравнение $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$, имеющее частное решение вида $y = e^{mx}$, где m постоянное.

266. Интегрировать уравнение $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, допускающее частное решение в виде полинома.

267. Интегрировать уравнение $xy'' - (x+5)y' + 3y = 0$, которому можно удовлетворить, взяв за y полином.

268. Интегрировать уравнение $(x^2-1)y'' = 6y$, которому можно удовлетворить, взяв за y полином.

269. Интегрировать уравнение $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, которому можно удовлетворить, взяв за y полином.

270. Интегрировать уравнение $y'' - 2xy' + 4y = 0$, допускающее частное решение в виде полинома.

271. При каком значении μ уравнение $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \mu y = 0$ имеет частное решение в виде полинома третьей степени?

272. Какое соотношение должно существовать между функциями p и q для того, чтобы уравнение $y'' = py' + qy$ имело два независимых частных решения y_1 и y_2, связанных условием $y_1 y_2 = 1$. В случае, когда $p = \frac{1}{x}$, определить q и общий интеграл уравнения.

273. Найти общий интеграл уравнения $y'' + \frac{\beta}{x^2(1-x)^2}y = 0$, где β постоянная положительная (*Stokes*)

Указание: искать частное решение в виде $y = x^m(1-x)^n$.

274. Найти решение уравнения $y'' + \frac{\beta}{x^2(1-x)^2}y = \beta$, которое удовлетворяет условиям $y = 0$; $y' = 0$ при $x = 0$ (*Stokes*).

Системы дифференциальных уравнений.

275. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = -\frac{dq}{p}$.

276. $\frac{dx}{x^2+3xy^2} = \frac{dy}{2y^2} = \frac{dz}{2y^2 z}$.

277. $(z-y)^2\frac{dy}{dx} = z$; $(z-y)^2\frac{dz}{dx} = y$.

278. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{y+x} = \frac{dz}{z}$.

279. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$.

280. $\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$.

281. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

282. $\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)} = -\frac{dy}{x(x+y)}$.

283. $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$.

284. $\frac{dx}{dt} = \frac{x-y}{z-t}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{x-y}{z-t}$; $\frac{dt}{dz} = x - y + 1$.

285. Интегрировать систему $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$ при начальных условиях $z = -1$; $y = 1$ при $x = 0$.

286. Интегрировать систему $x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = s$; $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$.

Указание: положить $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$; $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$.

287. $\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$; $\frac{dz}{dx} - y + z = 0$.

288. $\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0$; $\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$.

289. $\frac{dx}{dt} = z + y - x$; $\frac{dy}{dt} = z + x - y$; $\frac{dz}{dt} = x + y - z$.

290. $\frac{dx}{dt} = y + z$; $\frac{dy}{dt} = x + z$; $\frac{dz}{dt} = x + y$.

291. $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 2z$; $3\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = y + 9z$.

292. $\frac{dx}{dt} + y - z = 0$; $\frac{dy}{dt} - z = 0$; $\frac{dz}{dt} + x - z = 0$.

293. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$.

294. $\frac{dx}{dt} = y - z$; $\frac{dy}{dt} = z - 2x$; $\frac{dz}{dt} = 2x - y$.

295. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = 0$; $\frac{d^2y}{dt^2} - 2m^2x = 0$.

296. Интегрировать систему:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3c^2(y - x) - 3c^2z; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -c^2(y - x); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -c^2z$$

при начальных условиях $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$; $y = a$, $\frac{dy}{dt} = 0$; $z = b$, $\frac{dz}{dt} = 0$ при $t = 0$.

297. Интегрировать систему:

$$\begin{cases} 6x'' + 9x + 6y'' + 15y + 11z'' + 20z = 0. \\ 6x'' + 15x + 11y'' + 38y + 14z'' + 41z = 0. \\ 11x'' + 20x + 14y'' + 41y + 22z'' + 49z = 0. \end{cases}$$

298. Интегрировать систему:

$$\begin{cases} x''' - x'' - x' + x - y'' + 3y' - 2y - z' - z = 0. \\ 3x'' - 6x' + 3x - y'' + 4y' - 3y + 2z' - 2z = 0. \\ x'' - 2x' + x + y' - y + z' - z = 0. \end{cases}$$

299. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y - 4z + 3 = 0$; $\frac{d^2z}{dx^2} + y + z + 5 = 0$.

300. $\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}$.

301. $\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t$; $\frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{-2t}$.

302. $\frac{dy}{dt} - 3z - y$; $\frac{dz}{dx} = z + y + e^{ax}$.

303. $\frac{dx}{dt} - 2x - 4y = \cos t$; $\frac{dy}{dt} + x + 2y = \sin t$.

304. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} - z = e^x$; $\frac{dy}{dx} + 2y - \frac{dz}{dx} + z = e^{-x}$.

305. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} - z = e^x$; $\frac{dy}{dx} + 2y + \frac{dz}{dx} + z = e^{-x}$.

306. $\frac{dy}{dx} - y + z = \frac{3}{2} x^2$; $\frac{dz}{dx} + 4y + 2z = 1 + 4x$.

307. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2a \frac{dz}{dx} - a^2y + 2a^2z = b$; $\frac{d^2z}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + 2a^2y - a^2z = cx$.

308. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} - y + z = x + 1$; $x^2 \frac{d^2z}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - y - z = -x - 1$.

309. $\frac{dx}{dt} + n^2y = \cos nt$; $\frac{dy}{dt} + n^2x = \sin nt$.

310. $\frac{dy}{dx} + \frac{z}{x^2} = 1$; $\frac{dz}{dx} \quad y = x$. 311. $\frac{dy}{dx} + z = 1$; $\frac{dz}{dx} + \frac{2y}{x^2} = \log x$.

312. $t \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + tx = 0$, $\frac{dy}{dt} + \frac{2y}{t} - \frac{dx}{dt} = 0$.

313. $t \frac{dx}{dt} = t - 2x$; $t \frac{dy}{dt} = t(x + y) - 2x - t$.

Линейные уравнения первого порядка с частными производными.

Найти общий интеграл уравнений:

314. $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y$.

315. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0$.

316. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x$.

317. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

318. $x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - \sqrt{R^2 - z^2}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

319. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

320. $y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} = axz$.

321. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 - z^2}$.

322. $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

323. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - z^2$.

324. $xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^4 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2y^3$.

325. $z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

326. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

327. $(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0$.

326. $(xy^3 - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$.

329. $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y^2z = 0$.

330. $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$.

331. $(y + x) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

332. $(x + y) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

333. $(z + y - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$.

334. $(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-e^{x+y}$.

335. $x\frac{\partial u}{\partial x}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=y+z$.

336. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$.

337. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$.

338. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x^2+2u$.

339. $xy\frac{\partial u}{\partial x}-\sqrt{1-y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}\right)-axy\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

340. $(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$.

341. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0$ и проходящую через кривую $z=h$; $xy=c^2$.

342. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x$ и проходящую через кривую $x=a$; $yz=\frac{a^2+2}{2a}$.

343. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$ и проходящую через кривую $x=a$; $y^2+z^2=a^2$.

344. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-x}{z}$ и проходящую через кривую $x=1$; $z=y^2$.

345. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$ и проходящую через кривую $x+y+z=0$; $x^2+y^2+z^2=R^2$.

346. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $tg\,y\frac{\partial z}{\partial x}+tg\,x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{\cos y}$ и проходящую через кривую $y=2x$; $z=tg^3 x$.

347. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению: $x(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)=0$ и проходящую через кривую $z=c$; $x^2+y^2=R^2$.

Геометрические приложения дифференциальных уравнений.

348. Найти кривую, для которой радиус-вектор равен длине касательной между точкой касания и осью OX.

349. Найти кривые, обладающие тем свойством, что треугольник, образованный осью OY, касательной и радиусом-вектором, проведенным из начала в точку касания, равнобедренный.

350. Дана система прямоугольных осей XOY и точка A на оси ординат. Найти такую кривую, что, если провести в точке M ее касательную,

то последняя пересечет ось абсцисс в точке T, равноудаленной от точек M и A; $OA = a$.

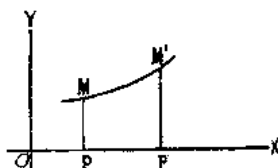
351. Найти кривую под тем условием, что расстояние AN и AT постоянной точки A до нормали и до касательной в любой точке кривой находятся в постоянном отношении k.

352. Найти кривую, для которой сумма длин нормали и поднормали есть величина постоянная.

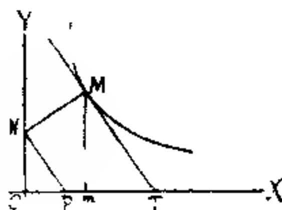
353. Найти кривую, для которой сумма длин касательной и подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания.

354. Найти кривую такого рода, чтобы площадь $MM'P'P$, ограниченная кривою MM', ординатами MP и $M'P'$ и осью OX была пропорциональна дуге MM', как бы ни были выбраны точки M и M' (черт. 48).

355. Найти кривую, для которой остается постоянным отношение подкасательной mT к отрезку OP, отсекаемому на оси OX прямой, проведенной через точку N пересечения оси OY с нормалью, параллельно касательной (черт. 49).



Черт. 48.



Черт 49.

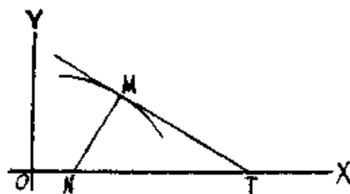
356. Касательная и нормаль в любой точке M кривой пересекают ось абсцисс в точках T и N таким образом, что отрезок TN сохраняет постоянную величину $2a$. Найти уравнение кривой.

357. Найти кривую, обладающую тем свойством, что всякая дуга ее равна отрезку, образуемому на оси OX касательными в концах этой дуги.

358. Найти кривую под условием, чтобы отрезок касательной между точкой касания и данной прямой был виден из данной точки под углом 45°.

359. Найти кривую, у которой квадрат длины касательной пропорционален подкасательной.

360. Найти уравнение такой кривой, чтобы для каждой точки M ее было выполнено следующее условие: произведение отрезков ON и OT, отсекаемых касательной и нормалью на оси OX, должно быть равно постоянной c^2 (черт. 50).



Черт. 50.

361. В точке M кривой проводится касательная, и в точке пересечения P этой касательной с осью OY восставляется к ней перпендикуляр, пересекающий OX в точке A. Какова должна быть кривая для того, чтобы площадь треугольника OAP была постоянной.

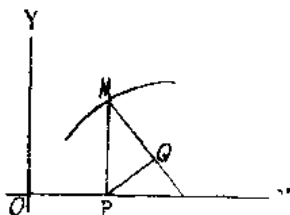
362. Обозначения те же, как и в № 361, но требуется определить кривую под условием, чтобы площадь треугольника MPA была постоянной.

363. Найти кривую под условием, чтобы средина отрезка оси абсцисс между точками пересечения ее с касательною и нормалью к кривой была постоянно одна и та же.

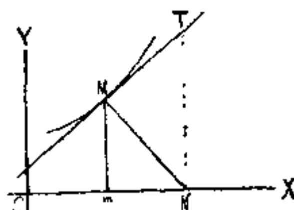
364. Найти уравнение такой кривой, чтобы расстояние ее нормали в точке M до основания ординаты этой точки оставалось постоянным. $PQ = a$ (черт. 51).

365. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью OX, касательной и радиусом-вектором, проведенным из начала в точку касания, постоянна.

366. Найти такую кривую, чтобы ее нормаль MN и касательная MT определяли отрезок NT постоянной длины на прямой, проведенной перпендикулярно оси OY через точку N, в которой нормаль пересекает ось OX (черт. 52).



Черт. 51.

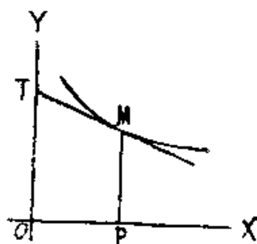


Черт. 52

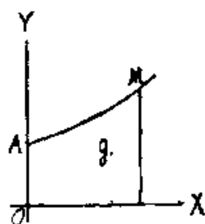
367. Найти уравнение кривой, обладающей следующим свойством: если в какой-либо точке M кривой провести касательную, пересекающую ось OY в точке T, и провести ординату этой точки MP, то площадь трапеции $OTMP$ будет равна постоянному числу a^2 (черт. 53).

Найти интегральную кривую, проходящую через точку (a, a).

368. Найти такую кривую AM, чтобы абсцисса центра тяжести площади $OAMP$ была равна $\frac{3}{4}$ абсциссы точки M (черт. 54).



Черт. 53.



Черт. 54.

369. Найти кривые, для которых отношение расстояний любой нормали до двух данных точек постоянно.

370. Найти кривые, для которых произведение расстояний любой касательной до двух данных точек постоянно.

371. Найти кривые, у которых отрезок нормали между осями координат имеет постоянную длину.

372. Найти кривые, для которых средина отрезка нормали в любой точке кривой между этой точкой и осью абсцисс лежит на прямой $y = x$.

373. Найти кривые, у которых отрезок касательной между осями координат имеет постоянную длину.

374. Найти кривую под условием, чтобы треугольник, составленный радиусом-вектором, касательною и перпендикуляром из начала координат на касательную имел постоянную площадь a^2.

375. По касательным к кривой от точки касания M откладываются отрезки MN постоянной длины a. Какова должна быть кривая для того, чтобы концы N этих отрезков лежали на окружности круга радиуса a с центром в начале координат.

376. Обозначения те же, что и в задаче № 375; но требуется определить кривую под условием, чтобы треугольник MON, где O начало координат, был равнобедренным.

377. Найти кривые, для которых площадь, заключенная между осью OX, кривой, постоянной ординатой $x = a$ и переменной ординатой, равна отношению куба ординаты к абсциссе.

378. Найти кривые, для которых отношение площади, отсчитываемой, как и в задаче № 377, к длине дуги — есть постоянная величина b.

379. Найти кривые, для которых длина дуги пропорциональна квадрату абсциссы.

380. Найти кривые, для которых длина дуги s есть данная функция от ординаты y: $s = f(y)$. Частные случаи: 1) $s^2 = 8ay$; 2) $s^2 + a^2 = y^2$; 3) $y = ae^{\frac{s}{a}}$.

381. Найти ортогональные траектории парабол $y^2 = a(a - 2x)$.

382. Найти ортогональные траектории равных парабол, касающихся в вершине данной прямой.

383. Найти ортогональные траектории системы эллипсов, имеющих одну и ту же большую ось $2a$.

384. Найти ортогональные траектории эллипсов семейства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ (a — параметр семейства).

385. Прямая перемещается таким образом, что отрезок ее между осями координат остается постоянным. Найти ортогональные траектории этой прямой.

386. Найти ортогональные траектории кругов радиуса a, имеющих центры на данной прямой.

387. Найти ортогональные траектории лемнискат $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

388. Парабола $y^2 = 2px$ перемещается параллельно самой себе так, что вершина ее описывает параболу $y^2 + 2px = 0$. Найти ортогональные траектории движущейся параболы.

389. Найти ортогональные траектории кругов, касающихся двух данных прямых, составляющих угол 2θ.

390. Найти ортогональные траектории кругов радиуса R, проходящих через начало координат.

391. Найти ортогональные траектории семейства кривых

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0.$$

392. Найти ортогональные траектории семейства кривых

$$x^3 + (x - a)y^2 = 0.$$

Указание: в задачах 391 и 392 перейти к полярным координатам.

393. Найти эвольвенту цепной линии $y = a\, ch\, \frac{x}{a}$.

394. Найти эвольвенту круга

395. Найти эвольвенту эвольвенты круга
$x = a\,(cost + t\, sint);\, y = a\,(sint - t\, cost)$.

396. Найти траектории, пересекающие кардиоиды $\rho = c(1 + cos\,\theta)$ под углом α.

397. Найти траектории, пересекающие кривые $\rho = c\, cos\,\theta$ под углом α.

398. Найти кривые, пересекающие под углом 45° касательные к кругу $x^2 + y^2 = R^2$.

399. Найти кривую, для которой проекция радиуса кривизны на ось OY есть величина постоянная.

400. Найти кривые, которых радиус кривизны равен отрезку нормали, заключенному между данными параллельными прямыми.

В задачах 401—404 найти кривые, для которых радиус кривизны ρ есть данная функция $f(\alpha)$ угла α, образуемого касательною с осью OX:

401. $f(\alpha) = a$ **402.** $f(\alpha) = ae^{m\alpha}$.

403. $f(\alpha) = a\alpha$. **404.** $f(\alpha) = a sin\alpha$.

В задачах 405—408 найти кривые, для которых длина дуги s есть данная функция от угла α, образуемого касательной в конце дуги с осью OX:

405. $s = a\alpha$. **406.** $s = \frac{a\alpha^2}{2}$.

407. $s = ae^{m\alpha}$. **408.** $s = a cos\alpha$.

В задачах 409—412 найти кривые, для которых радиус кривизны ρ есть данная функция длины дуги s:

409. $s^2 = a(\rho - a)$. **410.** $\rho = ms$.

411. $\rho^2 + s^2 = a^2$. **412.** $\rho^2 = 2as$.

413. Какие кривые, кроме круга, обладают тем свойством, что радиус их кривизны постоянно равен радиусу-вектору?

414. Найти такую кривую, чтобы дуга ее, считаемая от некоторой точки, была равна длине перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в конце дуги.

415. Даны точки O и M_0 ($OM_0 = a$). Требуется определить кривую, проходящую через M_0 и обладающую тем свойством, что площадь сектора M_0OM между данным радиусом-вектором OM_0 и произвольным OM равна $\frac{1}{4}$ квадрата дуги M_0M.

416. Найти общее уравнение поверхностей такого рода, чтобы угол между прямою ON, соединяющею начало со следом нормали в точке M на плоскости XOY, и прямою OP, соединяющею начало с основанием перпендикуляра, опущенного из M на плоскость XOY, был равен постоянно 45°.

417. Обозначения те же, что и в задаче № 416; но требуется определить поверхность под условием, чтобы площадь треугольника ONP была постоянна (a^2).

418. Найти общее уравнение поверхностей такого рода, чтобы длина отрезка нормали MN между точкой поверхности M и точкой встречи нормали N с плоскостью XOY была равна ON.

419. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом конусы $xy - \alpha z^2 = 0$.

420. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом поверхности $xyz = \alpha$.

421. Найти поверхность, пересекающую под прямым углом сферы $x^2 + y^2 + z^2 - \alpha x = 0$ и проходящую через прямую $x - y = 0$; $z = h$.

422. Найти поверхность, пересекающую под прямым углом поверхности $xy = \alpha z$ и проходящую через кривую $z = c$; $x^2 + y^2 = R^2$.

В задачах 419—422 α обозначает параметр, который может принимать произвольные значения.

ОТДЕЛ VII.

Определенные интегралы.

Непосредственное вычисление определенных интегралов.

1. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)}$.

2. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

3. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

5. $\int\limits_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

6. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$; $-\pi < \alpha < +\pi$.

7. $\int\limits_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$.

8. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^4dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

9. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$; $a^2 < 1$.

10. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{1-2x\cos x+x^2}$; $\alpha^2 < 1$.

Применение формул приведения к нахождению определенных интегралов.

11. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$.

12. $\int\limits_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$.

13. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\cos x\,dx$.

14. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\sin x\,dx$.

15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2k}x\cos nx\,dx$.

16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2}x\sin mx\,dx$.

17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\sin mx\,dx$; m — целое число > 0.

18. $\int\limits_0^{2\pi} \cos^m x \cos nx\, dx$; m и n — целые положительные числа.

19. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin mx}{\sin x}\, dx$; m — целое число.

20. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{2n+1} x\, dx$, $a > 0$.

21. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mx} \cos^{2n} x\, dx$.

Определенные интегралы, получаемые через разложение в ряд подъинтегральной функции.

22. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos mx\, dx}{1 - 2a \cos x + a^2}$.

23. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx$

24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1 - a \cos x}\, dx$; m — целое число; $a^2 < 1$.

25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1 - a \cos x}\, x\, dx$; $a^2 < 1$.

26. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)(1 - 2\beta \cos x + \beta^2)}$.

27. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 - 2a \cos x + a^2}$.

28. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + 2a \cos mx + a^2)}$.

29. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin mx\, dx}{(1 + x^2)(1 + 2a \cos mx + a^2)}$.

30. $\int\limits_0^{\pi} \log(1 - 2a \cos x + a^2)\, dx$.

31. $\int\limits_0^{\pi} \log(1 - 2a \cos x + a^2) \cos kx\, dx$; k — целое число > 0.

32. $\int\limits_0^{\infty} \log(1 - 2a \cos x + a^2) \frac{dx}{1 + x^2}$; $a^2 < 1$.

33. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 - 2a \cos x + a^2)^2}\, dx$, $a^2 < 1$.

34. $\int\limits_0^{1} \frac{\log x\, dx}{1 - x^2}$.

35. $\int\limits_0^{\infty} \log \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx$.

Вычисление определенных интегралов при помощи преобразования переменного.

36. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$. Положить $x = tg\, \varphi$.

37. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$.

38. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

39. $\int\limits_0^{\pi} x \log \sin x \, dx$.

40. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x)^2 \, dx$.

41. $\int\limits_0^{\pi} x \sin^{2m} x \, dx$ и $\int\limits_0^{\pi} x \sin^{2m+1} x \, dx$.

42. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)} dx$; $a > 0$, $b > 0$.

Применение дифференцирования по параметру.

43. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1-\alpha^2 z^2)}{\sqrt{1-z^2}} dz$; $\alpha^2 < 1$.

44. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1-\alpha^2 z^2)}{z\sqrt{1-z^2}} dz$; $|\alpha| < 1$.

43. $\int\limits_0^{\infty} \log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) \log\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right) dx$; $a > 0$, $b > 0$.

46. $\int\limits_0^{\alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$.

47. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{x e^x} dx$.

48. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) \, dx$.

49. $\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$.

50. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin kx \, dx$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

51. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

52. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 bx \frac{dx}{x^2}$; $\alpha \geq 0$.

Интегрирование под знаком определенного интеграла.

53. На основании равенства $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty z^{m-1} e^{-xz}\, dz$ доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2p} x}{x^m}\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2p}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{z^{m-2}}{(z^2+2^2)(z^2+4^2)\ldots[z^2+(2p)^2]}\, dz;$$

p целое число $\geqq \frac{m}{2}$; $m > 1$.

54. На основании равенства $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty z^{m-1} e^{-xz}\, dz$ доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2p+1} x}{x^m}\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2p+1)}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(z^2+1)(z^2+9)\ldots[z^2+(2p+1)^2]}\, dz;$$

$2p+1$ целое число (нечетное) $\geqq m$; $m > 1$.

55. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx.$

56. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx.$

57. Найти $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{x}}$ и $\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}}$, зная, что $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 x}\, dx.$

Эйлеровы интегралы.

58. $\int_0^1 x \sqrt[3]{1-x^3}\, dx.$

59. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$

60. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{2n-1} x\, dx$; $0 < n < 1$.

61. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}.$

62. Выразить через функцию Γ интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.$

63. Выразить через функцию Γ интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\, dx.$

64. Выразить через функцию Γ интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\, dx; \ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

65. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}(1-x)^a(x+a)}$. См. задачу № 64.

66. $\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\varphi\, d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n}$; $0<k<1$, $n>0$.

67. Выразить через функцию B интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2l-1}x \sin^{2m-1}x\, dx}{(a\cos^2 x+b\sin^2 x)^{l+m}}$.

68. $\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx$; $0<a<1$.

69. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{(1+x)\log x}\,dx$; $0<a<1$, $0<b<1$.

70. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$.

71. $\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(1+x)^2}$; $0<a<1$.

72. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}\,dx$.

73. $\int_0^\infty \frac{\log\left(x+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx$.

74. Если функция $f(x)$ такова, что при всяком положительном A интеграл $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл, то $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\log\frac{b}{a}$ при $a>0$, $b>0$ *(Frullani)*.

75. $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx$; $a>0$, $b>0$.

76. $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx$.

77. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$; $a>0$, $b>0$.

ОТДЕЛ VIII

Ряды.

Исследование сходимости рядов

Исследовать сходимость рядов, общий член которых имеет вид:

1. $u_n = \frac{1}{x^n+1}$.

2. $u_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

3. $u_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$.

4. $u_n = \frac{x^{2^n}}{1+x^{2^{n+1}}}$.

5. $u_n = \frac{(1.2.3\dots n)^2}{1.2.3\dots 2n} x^n$.

6. $u_n = 1.2.3\dots n\left(\frac{x}{n}\right)^n$.

7. $u_n = \frac{n^n}{1.2.3\dots n} x^n$.

8. Выяснить условия сходимости гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$$

9. $u_n = \frac{1.2.3\dots n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$.

10. $u_n = n\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}$; $a>0$; $b>0$.

11. $u_n = \frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\dots(nb+1)}$; $a>0$, $b>0$.

12. $u_n = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

13. $u_n = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

14. $u_n = \left(\frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\right)^\alpha$.

15. $u_n = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{1.2.3\dots n}\cdot\frac{1}{n^\alpha}$; $\beta>0$, $\alpha>0$.

16. $u_n = 1-\cos\frac{\pi}{n}$.

17. $u_n = \log\cos\frac{x}{n}$.

18. $u_n = (-1)^n \sin\frac{x}{n}$.

19. $u_n = \left\{\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)^k - 1\right\}^p$.

20. $u_n = \frac{x^n}{n}$.

21. $u_n = \log\frac{n+1}{n-1} - \frac{a}{n}$.

22. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} - \frac{1}{n}$.

23. $u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

24. $u_n = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}$. **25.** $u_n = a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2$.

26. $u_n = x^{\log n}$. **27.** $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

28. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \ldots$$

Непосредственное суммирование конечных и бесконечных рядов.

29. Найти сумму $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$, где $f(x) = a + bx + cx^2$.

30. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$. **31.** $1^3 + 5^3 + 9^3 + \ldots + (4n+1)^3$.

32. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + n(n+1)^2$.

33. $1 \cdot n^2 + 2(n-1)^2 + \ldots + k(n-k+1)^2 + \ldots + n \cdot 1^2$.

34. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 (n-k+1)^2$. **35.** $1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^3$.

36. $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin (n-1)x$.

37. $\sin x + 2 \sin 2x + \ldots + (n-1) \sin(n-1)x$.

38. $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha$.

39. $\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \ldots + (n-1) \cos(n-1)x$.

40. $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n-1) x$.

41. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots - \sin 2nx$.

42. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx$.

43. $\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 5x - \ldots + (-1)^{n-1} \sin^2 (2n-1)x$.

44. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \sin \alpha n \cdot x^n$; $|x| < 1$.

45. Найти при условии $|x| < 1$ сумму ряда $1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + \ldots$

46. Определить при $|x| < 1$ сумму ряда $1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots$

47. Определить при $|x| < 1$ сумму ряда $x - 11x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} (n^3 + n^2 - 1) x^n + \ldots$

48. Определить при $|x| < 1$ сумму ряда $1 + 16x + 81x^2 + \ldots + n^4 x^{n-1} + \ldots$

49. Разложить в ряд по восходящим степеням z дробь $\frac{1-z}{1-z-2z^2}$ и определить область его сходимости.

50. То же для дроби $\frac{1-z}{1-5z+6z^2}$.

51. То же для дроби $\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$.

52. Разложить при $|x| < 1$ в ряд по восходящим степеням x дробь $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

53. Разложить при $|x| < 1$ в ряд по восходящим степеням x дробь $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$.

54. Найти сумму

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}.$$

Найти суммы рядов:

55. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$

56. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots$

57. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\cdots$

58. $\frac{1}{1.7}+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.11}+\cdots$

59. $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2.(n+1)^2}+\cdots$

60. $\frac{2}{1^2.3^2}+\frac{3}{2^2.4^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2.(n+2)^2}+\cdots$

61. $\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{2}{3^2.5^2}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$

62. $\frac{3}{1^2.5^2}+\frac{5}{3^2.7^2}+\cdots+\frac{2n+1}{(2n-1)^2(2n+3)^2}+\cdots$

63. $\frac{1}{1.5.9}+\frac{1}{3.7.11}+\frac{1}{5.9.13}+\cdots$

64. $\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{2.5.8}+\frac{1}{3.6.9}+\cdots$

65. $\frac{1}{1.3.5.7}+\frac{1}{3.5.7.9}+\frac{1}{5.7.9.11}+\cdots$

66. $\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\frac{1}{4.5.6.7}+\cdots$

67. Представить в виде определенного интеграла сумму ряда

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\ldots;\ a>0,\ b>0.$$

Определить суммы рядов:

68. $S=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$

69. $S=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots$

70. $S=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots$, где суммирование распространяется на все нечетные числа, не делящиеся на 3.

71. $S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$

72. $S=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$

73. $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\cdots$

74. $S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$

75. $S=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\cdots-\frac{1}{8n-1}+\frac{1}{8n+1}-\cdots$

76. Выразить определенным интегралом сумму ряда:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)};\ \alpha>-1,\ \beta>-1,\ \alpha\neq\beta.$$

Найти суммы рядов:

77. $S=\sum\limits_{n=3,5,7,}\frac{1}{n^2-1}$.

78. $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$.

79. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}$.

80. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+h)}$; h целое число ≥ 1.

81. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4n^2-1)}$.

82. $S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(n^2-1)}$.

83. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$.

84. $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\dots$

85. $S=\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}-\dots$

86. $S=\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{6.7.8}+\dots$

87. $S=\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.4^2}+\dots$

88. $S=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.6}+\frac{1}{5.7}+\dots$

89. $S=\frac{1}{1^2.2^2.3^2}+\frac{1}{2^2.3^2.4^2}+\frac{1}{3^2.4^2.5^2}+\dots$

90. $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{x}{2.3.4}+\frac{x^2}{3.4.5}+\dots$; $|x|<1$.

91. Суммировать ряд $S=\frac{2}{3}-\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}-\dots$, приняв в соображение интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi$.

92. Суммировать ряд

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+\dots+(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}+\dots,$$

приняв в соображение интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$.

Определить суммы рядов:

93. $S=\frac{z^3}{3}+\frac{z^7}{7}+\frac{z^{11}}{11}+\dots$

94. $S=\frac{z}{1}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^9}{9}+\dots$

95. $S=1+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^8}{8!}+\dots$

96. $S=1+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^6}{6!}+\dots$

97. Доказать, что при условии $|x|<1$:

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\dots$$

Тригонометрические ряды.

98. В промежутке $(-\pi, +\pi)$ разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, определяемую равенствами $f(x) = \cos x$, если $x > 0$ и $f(x) = -\cos x$, если $x < 0$.

99. В промежутке $(-\pi, +\pi)$ разложить в ряд Фурье функцию $f = |x|^3$ и, на основании этого разложения, найти суммы рядов:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots;\quad 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots;\quad 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \ldots$$

100. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-h, +h)$ функцию e^x

101. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, +\pi)$ функцию $\cos ax$.

102. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, +\pi)$ функцию $\sin ax$.

103. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, +\pi)$ функцию $\operatorname{sh} ax$.

104. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, +\pi)$ функцию $\operatorname{ch} ax$.

105. В промежутке $(-\pi, +\pi)$ разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \log \cos \frac{x}{2}.$$

106. Доказать, что в пределах от 0 до π имеет место разложение

$$\frac{\pi}{2} \sin x = 1 - \frac{2\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{2\cos 6x}{5 \cdot 7} - \ldots$$

107. Доказать, что при $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ имеет место разложение:

$$\frac{\pi x}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right) = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^4} + \frac{\sin 5x}{5^4} - \ldots$$

и, на основании этого, найти сумму ряда

$$S = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots$$

108. Доказать, что при $0 \leqq x \leqq \pi$ имеет место равенство:

$$\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots = \frac{\pi}{8} x(\pi - x).$$

109. Доказать, что при $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ имеет место равенство:

$$\frac{\cos 3x}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \ldots = \frac{\pi}{8}\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos x.$$

110. Доказать, что при $0 \leqq \theta < \pi$ имеет место равенство:

$$\frac{\sin 4\theta}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 6\theta}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 8\theta}{3 \cdot 4} + \ldots = \sin 2\theta - (\pi - 2\theta)\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta \log(4\sin^2\theta).$$

111. Доказать, что при $0 \leqq \theta < \pi$ имеет место равенство:

$$\frac{\cos 4\theta}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 6\theta}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 8\theta}{3 \cdot 4} + \ldots = \cos 2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin 2\theta - \sin^2\theta \log(4\sin^2\theta).$$

112. Доказать, что $\frac{\cos 3z}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\cos 5z}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{\cos 7z}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots = 2(\pi - 2z)\sin z +$

$$+\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\pi z + 2z^2 - 3\right)\cos z \text{ при условии } 0 \leqq z \leqq \pi.$$

113. $\frac{\sin 3z}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\sin 5z}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{\sin 7z}{3^2 \cdot 4^2} - \ldots = \left\{\frac{\pi^2}{6} + 3 - 2z^2\right\}\sin z - 4z\cos z$

при условии $-\frac{\pi}{2} < z \leqq +\frac{\pi}{2}$.

114. Найти сумму ряда $\frac{\sin^2 x}{1^2} + \frac{\sin^2 2x}{2^2} + \frac{\sin^2 3x}{3^2} + \ldots$ при условии $0 \leqq x \leqq \pi$.

115. Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\theta \, \sin^2 n\varphi}{n^2}$ при условиях

$$0 < \theta \leq \pi; \; 0 < \varphi < \pi.$$

116. Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta \, \sin^2 n\varphi}{n}$ при условиях:

$$0 < \theta < \pi; \; 0 < \varphi < \pi.$$

117. Приняв в соображение, что $\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$ $(n > 0)$, суммировать ряд $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$

Суммировать ряды:

118. $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots; \; 0 < x < 2\pi.$

119. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots; \; 0 < x < \pi.$

120. $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots; \; 0 < x < \pi.$

121. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 9x}{9} + \ldots; \; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

122. $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 9x}{9} + \ldots; \; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

123. $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}; \; S' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1}; \; 0 \leq x \leq 2\pi.$

ОТДЕЛ IX.

Приближенные вычисления.

Интерполирование.

1. Найти целую функцию от x, по возможности низкой степени, принимающую при $x = 2, 4, 5, 10$ соответственно значения 3, 7, 9, 19.

2. Найти целую функцию от x, по возможности низкой степени, принимающую при $x = 2, 4, 5, 10, 15$ соответственно значения 3, 7, 9, 19, 0.

3. Найти целую функцию от x, по возможности низкой степени, принимающую при $x = 1, 2, 3, 4, 5$ соответственно значения $2, 1, -1, 5, 0$.

4. Для функции $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ при $x = 0$ вычислены значения разностей $\Delta y_0 = +3$; $\Delta^2 y_0 = 0$; $\Delta^3 y_0 = 6$, соответствующие приращению $h = 1$ аргумента. Требуется вычислить разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, соответствующие приращению аргумента $h_1 = \frac{1}{10}$.

5. Для функции $y = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$ при $x = 0$ вычислены разности $\Delta y_0 = 4$; $\Delta^2 y_0 = 28$; $\Delta^3 y_0 = 66$, $\Delta^4 y_0 = 48$, соответствующие приращению аргумента $h = 1$. Требуется вычислить разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$, соответствующие приращению аргумента $h_1 = \frac{1}{10}$.

6. Пользуясь заданиями: $lg 1000 = 3$; $\Delta\, lg x = 0{,}0004340709$, $\Delta^2 lg x = -0{,}00000043343000$, $\Delta^3 lg x = 0{,}000000000864700$, $\Delta^4 lg x = -0{,}000000000002585$, составить таблицу значений логарифмов и их разностей до значения логарифма 1010. Определить, с какой точностью вычислен $lg 1010$.

7. Пользуясь таблицей

x	$log x$	$10^{10}\,\Delta\, log x$	$10^{10}\,\Delta^2\, log x$
1005	3,002166059	4319184,7	$-4291{,}3$
1006	3,002597978	4314893,4	$-4282{,}8$

вычислить $log 1005{,}237$, определив точность вычислений.

Указание: $\left|\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right| < \frac{1}{10}$ при $0 < x < 1$. Числа таблицы даны с точностью до $\frac{1}{2}$ последнего знака.

8. Пользуясь таблицей задачи № 7, найти $log\,1005{,}237437$.

9. Пользуясь таблицей задачи № 7, найти x по данному $log x = 3{,}002268651$.

10. Пользуясь таблицей задачи № 7, найти x из уравнения $log x = 3{,}002268462$.

11. Пользуясь таблицей

u	$log\, sh\, u$	$10^5\, \Delta\, log\, sh\, u$	$log\, ch\, u$	$10^5\, \Delta\, log\, ch\, u$
0.500	9.71692	94.0	0.05217	20.1
0.501	9.71786	93.8	0.05237	20.1
0.502	9.71879	93.7	0.05257	20.1
0.503	9.71973	93.5	0.05277	20.2
0.504	9.72066	93.3	0.05297	20.2

найти $sh\, 0{,}50235$.

12. Найти корень уравнения $ch\, u = 1{,}1287$. См. таблицу задачи № 11.

13. При помощи данных

x	$sin\, x$
41°	0,6560590290
42°	0,6691306064
43°	0,6819983601
44°	0,6946583705

вычислить с возможною точностью $sin\, 41°20'$.

14. По данным

φ	$F(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} sin^2 \varphi}}$
21°.0	0.370 6344
21°.5	0.379 6626
22°.0	0.388 7052
22°.5	0.397 7625

вычислить $F(\varphi)$ при $\varphi = 21°15'$.

15. По данным

φ	$F(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} sin^2 \varphi}}$
28°.0	0.49846 361
28°.5	0.50772 435
29°.0	0.51700 422
29°.5	0.52630 357

вычислить корень уравнения $F(\varphi) = 0{,}5$.

16. По данным

x	$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$
0.71	0.21645 01462
0.72	0.22429 28871
0.73	0.23207 69593
0.74	0.23980 32061

вычислить $\psi(0{,}715)$. Для оценки погрешности следует принять в соображение, что $\psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots$

17. По данным

x	$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$
0.83	0.30686 12
0.84	0.31405 89
0.85	0.32120 00
0.86	0.32829 22

вычислить корень уравнения $\psi(x) = 0{,}31$.

18. По данным

x	$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$
0.90	0.35618 41611 64
0.91	0.36304 10646 49
0.92	0.36985 27244 06
0.93	0.37661 97179 23
0.94	0.38334 26119 47

вычислить $\frac{d^2 \log \Gamma(1+x)}{dx^2}$ при $x = 0{,}90$.

19. По данным

φ	$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi} \, d\varphi$
45°	0.76719 59857
46°	0.78350 16779
47°	0.79976 65910
48°	0.81599 06973
49°	0.83217 40189
50°	0.84831 66279

вычислить $\frac{d E(\varphi)}{d\varphi}$ при $\varphi = 45°$.

20. По данным

x	$\log_{10} \Gamma(1+x)$
0,715	$\bar{1}$,959788 422669
0,716	$\bar{1}$,959884 302271
0,717	$\bar{1}$,959980 522220
0,718	$\bar{1}$,960077 082261

вычислить $\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$ при $x = 0{,}715$.

Приближенное вычисление определенных интегралов.

Вычислить по способу трапеций интегралы, принимая указанное в каждой задаче число промежутков m:

21. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; $m = 8$.

22. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{5x^2+4}}$; $m = 10$;

23. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{4x^2+3}}$; $m = 10$.

Вычислить по способу Симпсона интегралы, принимая указанное в каждой задаче число промежутков m:

24. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$; $m = 8$.

25. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; $m = 8$.

20 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; $m = 8$.

27. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{5x^3+4}}$; $m = 10$.

28. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{4x^2+3}}$; $m = 10$.

29. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; $m = 10$

30. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$; $m = 4$.

31. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$; $m = 5$.

Вычислить по способу Котеса интегралы, принимая указанное число ординат m:

32. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$; $m = 8$.

33. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$; $m = 4$.

34. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\log(x+1)}$; $m = 6$.

35. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$; $m = 5$.

Вычислить по способу Чебышева интегралы, принимая указанное число ординат m:

36. $\int\limits_{1000}^{1010} \frac{dx}{x}; \; m = 2.$

37. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \; m = 3.$

38. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x}\, dx; \; m = 4.$

Вычислить по способу Гаусса интегралы, принимая указанное число ординат m:

39. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}; \; m = 5.$

40. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\, dx}{1+x^4}; \; m = 4.$

41. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx; \; m = 4.$

42. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg\, x}{x}\, dx; \; m = 4.$

43. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\, dx}{\log(x+1)}; \; m = 4.$

44. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) d\varphi; \; m = 4.$

45. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x}\, dx; \; m = 4.$

46. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}\, d\varphi; \; m = 3.$

47. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Приложения формулы Эйлера-Маклорена.

48. Определить число знаков в числе $1 . 2 . 3 \ldots 99$ ($Log\, e = 0{,}43429\ldots$).

49. На основании формулы Эйлера, доказать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{A_2}{x^2} - \frac{3!\, A_4}{x^4} - \ldots - \frac{(2k-3)!\, A_{2k-2}}{x^{2k-2}} - \theta \frac{(2k-1)!\, A_{2k}}{x^{2k}}$$

$(0 < \theta < 1)$, где C — некоторое постоянное. Полагая $x = 10$, вычислить C с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$; $A_2 = \frac{1}{12}$; $A_4 = -\frac{1}{720}$; $A_6 = \frac{1}{30240}$.

50. Вычислить с точностью до 0,001 сумму $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{99}$.

Примечание. Модуль обыкновенных логарифмов с достаточной точностью дан в логарифмических таблицах.

51. Вычислить сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000000}$ с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^{10}}$; $C = 0{,}5772\,1566\,4901 \ldots$

52. На основании формулы Эйлера, доказать равенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}} = C + 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{A_2}{2x^{3/2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \frac{A_4}{x^{7/2}} - \ldots$$
$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4k-3)}{2^{2k-1}} \frac{A_{2k}}{x^{\frac{4k-1}{2}}} - \theta \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4k+1)}{2^{2k+1}} \frac{A_{2k+2}}{x^{\frac{4k+3}{2}}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Вычислить постоянное C с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$, полагая $x = 4$.

53. В равенстве

$$\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \ldots + \frac{\log n}{n} = C + \frac{1}{2} (\log n)^2 + \frac{\log n}{2n} - \frac{\log n - 1}{12n^3} +$$
$$+ \theta \frac{6 \log n - 11}{720 n^4}$$ $(0 < \theta < 1)$ вычислить постоянную C с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$.

54. Вычислить сумму ряда $s = \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} - \ldots$ с точностью до $\frac{1}{10^5}$.

55. На основании равенства

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} -$$
$$- \theta \cdot \frac{1}{42n^7}$$ $(0 < \theta < 1)$ вычислить $\frac{\pi^2}{6}$ с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$.

56. Вычислить с точностью до 0,000001 сумму ряда

$$x = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots$$

57. Вычислить сумму s ряда $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ на основании равенства

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} = s - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{12n^6} - \frac{\theta}{12n^8} \quad (0 < \theta < 1)$$

с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$.

58. При помощи формулы Эйлера вычислить сумму ряда $s = \frac{\log 2}{2^2} + \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} + \ldots$ с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$.

59. Вычислить сумму ряда $s' = \frac{\log 2}{2^2} - \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} - \ldots$ с точностью до $\frac{1}{10^7}$. См. № 58.

60. Вычислить с точностью до $\frac{1}{10^5}$ сумму ряда $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ См. № 52.

Вычисление определенных интегралов через разложение в ряды.

61. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ при помощи разложения в ряд с точностью до $\frac{1}{10^{\text{[illegible]}}}$.

62 Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ с точностью до $\frac{1}{10^3}$.

63 При помощи разложения в ряд вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до $\frac{1}{10^{\text{[illegible]}}}$

64. При помощи разложения в ряд вычислить $\int\limits_0^1 x^x\,dx$ с точностью до $\frac{1}{2\cdot 10^7}$.

65. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,dx$ при помощи разложения в ряд с точностью до $\frac{1}{10^8}$. *Указание*: положить $x = 2\,arctg\,z$

66. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\log(x+1)}$ с точностью до $\frac{1}{10^5}$.

Указание: положить $x+1=e^t$

ОТВЕТЫ.

ОТДЕЛ I, A.

1. $\sqrt{3}$.

2. 60° или 300°.

3. $(-3, -2)$.

4. $\left(\frac{21}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

5. $C_1\left(\frac{62}{11}, -\frac{47}{11}\right)$, $C_2\left(\frac{22}{3}, -\frac{79}{3}\right)$.

6. $A(-1, 0)$, $B(5, 6)$.

7. $(-4, 5)$, $(8, 1)$ и $(0, -3)$.

8. $M_4(2, -2)$.

9. $M_3(-4, -1)$ и $M_4(1, -4)$.

10. $r\sqrt{3}$ и $2r$, если r сторона шестиугольника.

11. 90°.

12. $AD = \sqrt{2}$, $\cos(AD, OC) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $x(x_2 - x_1) + y(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}\{x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2\}$.

14. $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y = 1$.

15. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

16. $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{18}$.

17. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

18. Уравнение может быть переписано так:
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{5})^2$.

19. $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

20. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.

21. $y^2 = 2px$.

22. $(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$.

23. Если $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, то $(x - a)^2 + y^2 = [(x - b)^2 + y^2]\sin^2 \alpha$.

24. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$.

25. $(5, 4)$ и $(-5, -4)$.

26. $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$, $y = 1 - x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1$.

27. $x = -x_1 + \frac{y_1}{2}$, $y = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1$.

28. $x = \frac{a}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1 + y_1)$, $y = \frac{a}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1 - 2y_1)$.

28. $x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

30. $x_1y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

31. $x_1y_1 = \frac{1}{2}$ (если старую ось ординат повернуть еще на 45° в сторону, обратную движению часовой стрелки).

32. $x_1 y_1 = -a^2$.
33. $x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 - x_1 - y_1 - 1 = 0$.
34. $x_1^2 + y_1^2 - h x_1 - \sqrt{3}\, h y_1 = 0$. Окружность.

---

35. a) $\frac{1}{2}x - y = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

c) $\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} + \dfrac{y}{-\frac{\sqrt{3}}{6}a} = 1$.

36. a) $x\cos 150^\circ + y\cos 150^\circ - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$. b) $x\cos 150^\circ - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$.
37. $x + 3y - 5 = 0$. **38.** $y - 1 = 0$.
39. $3x - y - 4 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$, $3x + 5y - 34 = 0$.
40. $\delta = \frac{1}{8}$, $\alpha = \beta = 60^\circ$. **41.** $y - 1 = (1 + \sqrt{3})(x - 2)$.
$y - 1 = (1 - \sqrt{3})(x - 2)$.
42. $2x + 3y - 1 = 0$. **43.** $x = 0$.
44. $x - 5y + 22 = 0$, $5x + y - 20 = 0$.
45. Равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной в M_2.
46. $(1, 1)$, $(-1, -1)$ и $(19, -11)$. **47.** 2.
48. $\frac{5}{2}$. **49.** $\frac{3}{2}$.
50. $12x + 8y - 7 = 0$. **51.** $y - 4 = \frac{7 + \sqrt{33}}{3}(x - 3)$.
$y - 4 = \frac{7 - \sqrt{33}}{3}(x - 3)$.
52. $4x - 3y + 25 = 0$. **53.** $y - 2 = \frac{-6 + \sqrt{21}}{6}(x + 1)$.
$y - 2 = \frac{-6 - \sqrt{21}}{6}(x + 1)$.
54. $4x + y - 6 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$.
55. $N_1(2, 1)$ и $N_2(0, 3)$. **56.** $M_2(1, 4)$, $M_3(5, 2)$.
57. $M_3(5, 2)$ и $M_4(2, 1)$ или $M_3(3, 8)$ и $M_4(0, 7)$.
58. $4x + 3y + 16 = 0$, $4x + 3y - 14 = 0$.
59. $2x + 3y - 6 = 0$.
60. $9x + 12y + 20 = 0$, $5x - 12y + 36 = 0$.
61. $2x + 4y - 3 = 0$. **62.** $x + 2y - 11 = 0$; $2x + y - 5 = 0$.
63. $P(a, 0)$; $a = 7 \pm \sqrt{10}$.
64. a) $x - y + 1 = 0$, b) $x = 2$, c) $x + 2y - 4 = 0$.
65. Такой точки на конечном расстоянии нет.
66. $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 = 0$. **67.** $7x^2 - 7y^2 - 15x + 5y - 70 = 0$.
68. Две точки: $(0, 1)$ и $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.
69. $x_0 = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}$, $y_0 = -3 \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

70. $\begin{cases} x - y + 1 = 0. \\ 3x + 2y - 7 = 0. \\ 2x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$ **71.** $\begin{cases} 4x - y - 7 = 0. \\ x + 3y - 31 = 0. \\ x - 5y - 7 = 0. \end{cases}$

72. $3x + y - 25 = 0$, $x - 3y - 15 = 0$, $2x + y = 0$.

73. $x - y + 3 = 0$. **74.** $y - 1 = -(2 - \sqrt{3})(x-1)$.
75. $(5 + 6\sqrt{3})x + (6 + 5\sqrt{3})y + 25\sqrt{3} - 31 = 0$.
76. $x - 1 = 0$ и $y - 2 = 0$. **77.** $3x - 4y - 10 = 0$
78. Уравнения перпендикуляров: $2x + 3y + 2 = 0$, $3x - 2y - 3 = 0$, $y = 0$.
79. $2x + 7y - 5 = 0$. **80.** $4x + 5y - 4 = 0$.
81. $y - 2 = 0$. **82** $x - y + 1 = 0$.
83. $x - 2y + 16 = 0$. **84.** $3x + 4y - 25 = 0$.
85. $115x + 69y + 99 = 0$, $69x - 115y - 199 = 0$.
86. $2x - 7y - 5 = 0$. **87.** $x = 0$, $y = 0$.
88. $x - 2y - 5 = 0$. **89.** $x + 2y - 5 = 0$, $2x - y - 5 = 0$.
90. $8x - \sqrt{17}y + 3 = 0$, $8x + \sqrt{17}y + 3 = 0$.
91. $7x + y - 4 = 0$, $x - 7y - 6 = 0$.
92. $67x + 5y - 72 = 0$. **93.** $3x + y - 1 = 0$.
94. Внутренний биссектор угла M_2: $x = y$
95. Внешний биссектор угла M_1: $\frac{x + y - 3}{\sqrt{2}} = \frac{3x - 2y - 1}{\sqrt{13}}$.
96 $x^2 - y^2 = 25$.
97. $(3 - 4\sqrt{5})x + (6 - \sqrt{5})y = 12 - 16\sqrt{5}$.
98. $(2, -2)$. **99.** $N(-2, 3)$.
100. $5x - 4y - 2 = 0$, $4x - 5y + 1 = 0$.
101. $62x - 41y + 20 = 0$, $73x - 14y + 31 = 0$
102. Третья вершина тр-ка $M_3\left(-\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right)$.
103. $3x - 46y + 28 = 0$, $46x - 3y - 77 = 0$, $9x + 2y - 28 = 0$.
104. $x - 1 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$, $x - 8y + 27 = 0$.
195. $C(-9{,}32;\ 2{,}29)$. **106.** $x_0 = \frac{9 - 2\sqrt{84}}{5}$; $y_0 = \frac{-2 + \sqrt{84}}{5}$.
107. $2x - y + 4 = 0$.

110. Если (x, y) старые координаты точки, новые координаты которой (x_1, y_1), то $x_1 = \frac{x + 2y - 1}{\sqrt{5}}$, $y_1 = +\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}$.

111. Если (x, y) старые координаты точки, новые координаты которой (x_1, y_1), то $x_1 = +\frac{(x + 2y - 1)\sqrt{7}}{5}$, $y_1 = -\frac{(2x - y - 1)\sqrt{3}}{5}$.

112. $x_1 + y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$; $x_1 - y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$.

113. $3x_1 + 5y_1 = 0$, $3x_1 - 5y_1 = 0$.

---

114. Прямая, проходящая через точку пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2.

115. Стороны параллелограмма. В I угле точки на прямой $ay + bx = \frac{2s}{\sin\theta}$, во II угле на прямой $ay - bx = \frac{2s}{\sin\theta}$; в III угле на прямой $-ay - bx = \frac{2s}{\sin\theta}$ и в IV угле на прямой $bx - ay = \frac{2s}{\sin\theta}$.

116. Прямая.
117. Прямая, проходящая через середину стороны AB.
118. Прямая $2sy - 2ax = s^2 - a^2$.
119. Прямая, параллельная данной прямой.

120. Прямая, соединяющая средину основания с противолежащей вершиной.

121. Если $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ координаты концов основания и $y = mx + n$ данная прямая, то уравнение геометрического места будет

$$x^2 + mxy + ny - a^2 = 0.$$

122. $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x = 0$.

123. $xy = \frac{2Cmn}{(m+n)^2 \sin\varphi}$.

124. $3x^2 - y^2 - 2ax = a^2$.

125. $\frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} = 1$.

126. $x^2 + y^2 + 2xy\,ctg\,\varphi = a^2$.

127. Прямая $(p - x_S)\left(\frac{q}{h}y + x - x_R\right) = (q - x_R)\left(\frac{p}{h}y + x - x_S\right)$.

128. $4x + 5y - 2 = 0$.

129. Полагая $C(a, 0)$, $D(-a, 0)$, считая оси прямоугольными и $Ax + By + C = 0$ уравнением прямой AB, найдем уравнение геометрического места $Bx^2 - Axy - Cy - Ba^2 = 0$.

130. $x^2 - y^2 + 9a \quad 2k = 0$. **131.** $x + y = 1$.

132. Прямая. **133.** Прямая

134. За начало берем точку 0. За ось абсцисс прямую, параллельную данным прямым. Угол между осями прямой. Пусть уравнения данных прямых будут: $y = l$ и $y = l + h$; тогда геометрическое место точки C: $hx + (h + l)y = h(h + l)$, геом. место точки D: $hx + ly = h\,l$

135. Окружность **136.** $9xy - 6px - 6py + 2p^2 = 0$.

137. $x - y = a + b$. **138.** $x^2 + y^2 \quad x = 0$.

139. Прямая, проходящая через точку A.

140. Если уравнения прямых AB и A_1B будут соответственно $y = \alpha(x - a)$ и $y = \beta(x - a_1)$, то искомое геом. место имеет своим уравнением $x^2 \quad y - (a + a_1)x - \frac{(a - a_1)(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}y + aa_1 = 0$.

141. Принимая стороны неподвижного прямого угла за оси координат и обозначая координаты точки A через a и b, получаем уравнение геометрического места: $(bx - ay)(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)xy = 0$.

143. Пусть точка P в начале координат, а уравнения данных прямых (параллельных оси OX) будут $y = b$ и $y = -\alpha b$. Уравнение геометрического места будет $x^2 + \left(y - \frac{(1-\alpha)b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b(1+\alpha)}{2}\right)^2$ (окружность).

144. Кривая 2-го порядка.

145. Кривая 2-го порядка.

---

146. 1) Мнимый эллипс, 2) гипербола, 3) парабола

147. $C\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

148. $k = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$; I. $\begin{cases} x\sqrt{3} - 2y = 0; \\ x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0; \end{cases}$ II. $\begin{cases} x\sqrt{3} + 2y = 0. \\ x + 2\sqrt{3}y + 2 = 0 \end{cases}$

149. $k = \pm 4$, $l = \pm 7$; $x + y - 2 = 0$, $2x + 2y - 3 = 0$; $x - y - 2 = 0$, $2x - 2y - 3 = 0$.

150. $x = y\,tg\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi}{2}\right)$; φ.

151. $0=\begin{vmatrix} x^2, & xy, & y^2, & x, & y, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 4, & -2, & 1, & 2, & -1, & 1 \\ 1, & -2, & 4, & 1, & -2, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 1 \\ 9, & 0, & 0, & 3, & 0, & 1 \end{vmatrix}=60xy-60y^2-60x-120y+180.$

152. $(x+y-1)(4x+2y-8)-2(3+\sqrt{8})xy=0.$

153. $(1, 0)$ и $\left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

154. $y=-2x-4$, $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.

155. $x+1=0$, $2x-y+1=0$.

156. $2x-y=0$, $x+2y-2=0$.

157. $(a+a')x+(b+b')y+c+c'=0$, $(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$.

158. $y=1$, $y=-\frac{7}{2}$; $x=1$, $x=-\frac{7}{2}$.

159. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$. **160.** $xy-x-y=0$.

161. $Ax^2+2Bxy+Cy^2-2Ey=0$.

162. $x^2+xy+y^2-2x-2y+1=0$.

163. Уравнения совокупностей противоположных сторон четыреугольника, имеющего диагоналями данные диаметры: $5(x+y)^2-1=0$ и $5(x-y)^2-9=0$.

164. Уравнение совокупности 3-й стороны и касательной к окружности в вершине треугольника противолежащей этой 3-й стороне: $(3x-2y-4)(x+y-3)+\frac{7}{5}(x^2+y^2-5)=0$.

---

165. $C(-1, 0)$; $x_1^2+x_1y_1-3=0$.

166. Дискриминант равен числу — 400.

167. Уравнение гиперболы $(x+y-1)(2x-y-1)-2=0$.

166. $A(x-x_c)^2+2B(x-x_c)(y-y_c)+C(y-y_c)^2-F=0$.

169. $(ax_1+by_1)(\alpha x_1+\beta y_1)+K=0$.

170. $x-y=0$.

171. Взяв за ось OX данную прямую, а за ось OY перпендикуляр опущенный из точки A на эту прямую, обозначив ординату точки A через b, а длину отрезка, отсекаемого кругом, через $2k$, получим уравнение искомого геом. места $x^2-2by+b^2-k^2=0$.

172. $y=2x-b$. **173.** $2x-5y+c=0$.

174 $x+2y+2=0$. **175.** $2x-y=0$.

176. $15x+10y+3=0$. **177.** $5x+5y+2=0$.

178. $x-y=0$. **179.** $x+2y-1=0$, $2x-y+2=0$.

180. $x+y-3=0$. **181.** $7x+y-2=0$.

182. $5x^2-5xy+2y^2-5x-2y=0$.

163. $(-3, 5)$.

184. $19x-43y=0$, $115x+23y-234=0$.

185. 1) $x+y=0$ и $x-y-2=0$. 2) $x+y=0$ и $x-y=0$.

186. a) $x=0$, $x+2y+1=0$; b) $x+2y+\frac{1}{2}=0$; c) окружность.

---

187. *Эллипс.* Уравнение большой оси $x + 2y - 8 = 0$, уравнение малой оси $2x - y - 1 = 0$. Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$.

188. *Эллипс.* Уравнение большой оси $x + y - 2 = 0$, уравнение малой оси $x - y = 0$. Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{1} = 1$.

189. *Эллипс.* Уравнение большой оси $x + y - 2 = 0$,
» малой » $x - y = 0$, $C(1, 1)$.
Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1$.

190. *Эллипс.* Уравнение большой оси $y + 2x - 4 = 0$,
» малой » $2y - x - 3 = 0$, $C(1, 2)$.
Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{64} + \frac{y_1^2}{4} = 1$.

191. *Гипербола.* Уравн. вещественн. оси $3x - y + 5 = 0$,
» мнимой » $x + 3y - 5 = 0$, $C(-1, 2)$.
Асимптоты $3x + 4y - 5 = 0$, $y - 2 = 0$.
Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{9} = 1$.

192. *Гипербола.* Уравн. веществен. оси $4x - 3y - 7 = 0$,
» мнимой » $3x + 4y + 1 = 0$, $C(1, -1)$.
Асимптоты $7x - 24y - 31 = 0$, $x - 1 = 0$.
Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$.

193. *Гипербола.* Уравн. веществен. оси $x - y + 1 = 0$,
» мнимой » $x + y - 3 = 0$, $C(1, 2)$.
Асимптоты $x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$. Простейшее уравнение $x_1^2 - y_1^2 = 1$.

194. *Гипербола.* Уравн. веществен. оси $2x - 3y + 1 = 0$,
» мнимой » $3x + 2y - 5 = 0$, $C(1, 1)$.
Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{9} = 1$.
Асимптоты $5x + 12y - 17 = 0$, $x - 1 = 0$.

195. *Парабола.* Уравнение оси $5x - 12y + 7 = 0$,
Уравнение касательной в вершине $12x + 5y - 17 = 0$. Вершина $(1, 1)$.
Простейшее уравнение $y_1^2 = 2x_1$.

196. *Парабола.* Уравнение оси $3x + 4y - 5 = 0$, уравнение касательной в вершине $4x - 3y + \frac{1}{2} = 0$. Простейшее уравнение $y_1^2 = 10x_1$.

197. ***Парабола.*** **Уравнение оси симметрии $3x + 4y = 0$, уравнение касательной в вершине $4x - 3y = 0$. Вершина $(0, 0)$. Простейшее уравнение** $y_1^2 = 2x_1$.

198. *Парабола.* Уравнение оси симметрии $x + y - 2 = 0$, уравнение касательной в вершине $x - y = 0$. Простейшее уравнение $y_1^2 = 2\sqrt{2}x_1$.

199. *Гипербола.* Уравн. веществен. оси $y = x + 1$,
» мнимой » $y = -x - 1$, $C(-1, 0)$.
Асимптоты: $x + 1 = 0$, $y = 0$; простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y_1^2}{\frac{1}{2}} = 1$.

200. *Эллипс.* Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{1} = 1$; формулы для перехода: $x = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} - 2$, $y = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \quad 1$.

201. *Парабола.* Простейшее уравнение $y_1^2=4\sqrt{2}x_1$; формулы для перехода: $x=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}+2$, $y=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}}+1$.

202. *Эллипс.* Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$; формулы для перехода: $x=\frac{x_1}{\sqrt{3}}-y_1+2$, $y=-\frac{x_1}{\sqrt{3}}+y_1$.

203. *Гипербола* Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{4}=1$; формулы для перехода: $x=\frac{x_1}{\sqrt{3}}+y_1+2$, $y=\frac{x_1}{\sqrt{3}}-y_1$.

204. *Парабола.* Простейшее уравнение $y_1^2=9x_1$; формулы для перехода: $x=x_1-\frac{y_1}{\sqrt{3}}+2$, $y=x_1-\frac{y_1}{\sqrt{3}}$.

205. *Парабола.* Простейшее уравнение $y_1^2=6x_1$; формулы для перехода: $x=x_1-\frac{y_1}{\sqrt{3}}$, $y=-x_1+\frac{y_1}{\sqrt{3}}+1$.

206. *Гипербола.* Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{1}=1$; формулы для перехода: $x=\frac{x_1}{\sqrt{3}}+y_1$, $y=\frac{x_1}{\sqrt{3}}-y_1+1$.

207. *Эллипс.* Простейшее уравнение $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$; формулы для перехода. $x=\frac{x_1}{\sqrt{3}}+y_1$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-y_1+1$.

208. *Эллипс.* Уравнение большой оси $5x+4y-9=0$,
» малой » $x-2y+1=0$, $C(1,1)$.
Простейшее уравнение $7x_1^2+21y_1^2-12=0$.

200. *Гипербола.* Уравнение вещественной оси $2x-y-3=0$, уравнение мнимой оси $y-1=0$. Простейшее уравнение кривой $x_1^2-3y_1^2-6=0$.

Асимптоты $\begin{cases} x-y-1=0. \\ x=2. \end{cases}$

210. *Парабола.* Уравнение оси $2x-y-3=0$, уравнение касательной в вершине $y+1=0$. Простейшее уравнение $y_1^2=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1$. Формулы для перехода: $y+1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x_1$, $2x-y-3=\pm 2y_1$.

211. $\frac{2}{3}x_1^2-2y_1^2=1$ $\begin{cases} x_1=\frac{(y+x)\sqrt{3}}{2}. \\ y_1=\frac{y-x}{2}. \end{cases}$

212. $\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y_1^2-1=0$ $\begin{cases} x_1=\frac{y-(2+\sqrt{3})x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}. \\ y_1=\frac{y-(\sqrt{3}-2)x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}. \end{cases}$

214. $y_1^2 = \frac{3p}{2} x_1$ $\begin{cases} x_1 = x + \frac{y}{2} + \frac{p}{8}. \\ y_1 = \left(y + \frac{p}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

215. $y_1^2 = \frac{3}{4} x_1$ $\begin{cases} x_1 = -\left(y - \frac{x}{2} - \frac{1}{16}\right). \\ y_1 = \left(x - \frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

216. $\frac{2x \quad y + 1}{\sqrt{5}} = -\frac{x \quad y \quad 3}{\sqrt{2}}$. **217.** $(x + y - 1)(2x - 3y - 3) + 4 = 0$.

218. $(x + 2y + 1)^2 - (2x + y - 1)^2 - 12 \quad 0$.

219. $(x - y + 1)(x + y \quad 4) + 2 = 0$.

220. $4x^2 \quad 7xy + 4y^2 - 7x + 8y \quad 0$.

221. $(x - 2y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 - 9 = 0$.

222. $(x + y - 1)^2 + (x + 2y - 1) \quad 0$.

223. Ось проходит через точку (a, b).

224. $(x - y)^2 - 8x \quad 0$. **225.** $x^2 - 2xy + y^2 + x - 1 \quad 0$.

226. $p = \frac{2a^2c^2}{(a^2 + c^2)^{3/2}}$ **227.** $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$.

228. $x^2 - y^2 + \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{3}(x + y) - \frac{12 \pm 8\sqrt{2}}{3} = 0$.

229. $A(x - x_c)^2 + 2B(x - x_c)(y - y_c) \quad A(y - y_c)^2 + F \quad 0$.

230. $(x \quad y + 1)^2 - (x \quad y + 1)^2 \quad 4$.

231. Точки M_1 и M_2 лежат на диаметрах. Уравнение линии $4(x - y + 1)^2 \quad (2x - y + 1)^2 \quad 1$.

232. $(x + y + 1)^2 + 4(x \quad y + 1) \quad 0$.

233. $(x - y + 1)^2 = 2x - y + 1$.

234. $(x - y - 1)^2 + 4(x - y \quad 1)^2 - 8 = 0$.

235. $3(x + 2y - 4)^2 + 2(x - 3y + 2)^2 - 10 = 0$.
$8(x + 2y - 4)^2 + 3(x - 4y + 2)^2 - 20 = 0$.

---

236. $x = \; + 2y$.

237. $y = \pm \frac{1}{3} x$; длины диаметров $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

238. $\sin\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

239. Длина их $\sqrt[4]{2}$. **240.** $\sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{2}$.

241. $x_1 = \frac{\left(y - \frac{b}{a} x\right)\sqrt{a^2 + b^2}}{2b}$, $y_1 = \frac{\left(y + \frac{b}{a} x\right)\sqrt{a^2 + b^2}}{2b}$ $\quad x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

242. $p = q \sin^2 \varphi$. **243.** $p = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

244. $e = \sqrt{\frac{2\sqrt{13}}{5 + \sqrt{13}}}$. **245.** $y = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} x$, $y = \mp \frac{8}{\sqrt{17}} x$.

246. $2a_1 = 2b_1 = 4$. **247.** $2a_1 = 2b_1 = 2\sqrt{2}$.

248. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

249. Обозначая через e — эксцентриситет и $\frac{b_1}{a_1} = m$, найдем

$$\sin\varphi = \frac{1 - m^2}{m(2 - e^2)} \sqrt{e^2 - 1}.$$

251. $2a_1 = \frac{179}{10}$, $2b_1 = \frac{171}{10}$.

252. Обозначая через α угол между вещественной осью гиперболы и асимптотой, найдем $tg\, 2\alpha = \frac{12}{5\sqrt{2}}$.

253. $2a = 16$, $2b = 12$.

254. $(3x - 4y + n)^2 + 25(x + l)^2 - 40 = 0$.

255. Парабола, имеющая одинаковую ось с данной.

256. $2(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$, где a и b полуоси эллипса.

257. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$. **238.** Равнобочная гипербола.

259. Пусть $x^2 + y^2 = r^2$ — уравнение окружности; если диаметр составляет с осью абсцисс угол φ и хорды параллельны оси OY, то уравнение геометрического места $(xy - r^2 \cos\varphi \sin\varphi)^2 = (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2 (y^2 + r^2\cos^2\varphi)$.

260. $x^2 - y^2 = r^2$.

251. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} = 0$.

262. $\frac{x^2}{\left(\frac{lm}{m+n}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ln}{m+n}\right)^2} = 1$.

263. $\frac{a^2x^2}{b^4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

264. Круг, имеющий общий с эллипсом центр и радиус $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

---

265. $a = \sqrt{5}$, $b = 2$. **266.** $e = \sqrt{3}$.

257. $60°$. **268.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

259. $e = \frac{\sqrt{1 - 2m\cos\alpha + m^2}}{1 + m}$. **270.** $F(2, 1)$, $x + y - 1 = 0$.

271. $F_1(-1, 2)$, $2x - y = 0$; $F_2(3, 0)$, $2x - y - 2 = 0$.

272. $F_1(-2, 4)$, $x - 2y + 14 = 0$; $F_2(0, 0)$, $x - 2y - 4 = 0$.

273. $F\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $2x - y = 0$. **274.** $y = \pm\frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$.

275. $x^2 - y^2 = \frac{2a^4}{a^2 - b^2}$ (если $a^2 > b^2$); $x^2 - y^2 = \frac{2b^4}{a^2 - b^2}$ (если $a^2 < b^2$).

276. $x^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$. **277.** b.

278. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

279. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}(x + y - 2)^2$.

280. $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0$.

281. $(x-1)^2+(y-1)^2=(x+y-1)^2$.

282. Фокусы парабол в точках $\left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$.

238. $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{2}{15}\cdot(x-2y+1)^2$.

285. $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

286. $8x^2-4xy+5y^2-324=0$.

287. $(4x+1)^2+(4y+6)^2=5\,(x+2y+1)^2$.

288. $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=[(\pm\sqrt{2}-1)x+(\pm\sqrt{2}-1)y+2\pm\sqrt{2}]^2,\\(x-1)^2+(y-1)^2=[(\pm\sqrt{2}-3)x+(\pm\sqrt{2}-1)y+2\pm\sqrt{2}]^2.\end{cases}$

289. $(x-1)^2+(y-1)^2=(x+y+1)^2$.

290. $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{25}{9}\,(x-y+4)^2$.

291. $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2}$.

292. Если ось OY директриса и все параболы проходят через точку $(a,\ 0)$, то уравнение геометрического места будет $4x^2+y^2-4ax=0$.

293. $x^2+y^2-2xy-4x=0$.

294. 1. $x^2-2xy+y^2-4x-4y-4=0$.
2. $x^2-2xy+y^2+4x-4y-4=0$.

295. $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$.

296. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$.

297. $3x^2+4xy-8x-4y+4=0$.

298. $x^2-y^2+2y-\frac{1}{2}=0$.

299. $x^2+y^2=1$.

300. $y+(2\pm\sqrt{3})\,x=0$.

301. $8x^2-4xy+5y^2-324=0$.

302. $2x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

303. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

304. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

---

305. $4x-5y-13=0$; $80x-117y+267=0$.

306. $17x+12y-45=0$; $10x+9y+24=0$.

307. $2x-3y+5=0$; $2x-3y-5=0$.

308. $10x+3y-8=0$; $10x+3y+8=0$.

303. $x-2y+7=0$; $7x+2y-1=0$.

310. $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=2$.

311. $x-2y=0$.

312. $x+y-2=0$, $5x+5y-6=0$.

313. $9x+10y-28=0$.

314. $\frac{p}{2\sin\alpha}$.

315. 45°.

316. Искомая площадь $S=\frac{1}{2}\,(a^2+b^2)\sin\theta$, где a и b полуоси гиперболы, а θ — угол между асимптотами.

323. Координаты 2-го фокуса $(3,\ 0)$. Длина вещественной оси $2a=\sqrt{5}$. Уравнение $4x^2-5y^2-12x-4=0$.

324. $x^2+2xy+y^2+6x-26y-55=0$.
$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

325. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.
$x^2+2xy+y^2-2x-18y+1=0$.

326. Если начало прямоугольных координат в центре круга с радиусом, равным r, а точка A имеет координаты c и 0, то искомое геометрическое место имеет уравнение $\frac{c^2-r^2}{2}(x^2+y^2)-cr^2x+r^4=0$.

327. Совокупность двух парабол $(y^2-1)^2-4x^2=0$.

328. Касательная в вершине.

329. Фокус.

330. $M\left(\frac{27}{22}, \frac{38}{11}\right)$.

331. $y^2=\frac{p}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$ (парабола).

332. Если касательные параллельны прямой $y=mx$, то $(x+my)(mx-y)=mc^2$, где $c^2=a^2-b^2$.

333. $y^2=2p(x-2p)$.

334. $x+y-1=0$.

335. Директриса.

336. $x^2+y^2=a^2+b^2$.

337. $y^2-2px=\operatorname{tg}^2\alpha\,(2x+p)^2$.

338. Парабола.

339. Окружность.

340. Прямая.

341. Парабола.

343. Если $y^2=2px$ и $y^2=2p_1(x-a)$ уравнения парабол, то искомая прямая: $x=\frac{p_1a}{p_1-p}$.

344 $9x^2-6xy+y^2-16x+32y+16=0$.

345. $4x^2+4xy+y^2-4x+18y+17=0$.

346. Окружность.

349. Директриса параболы.

350. Парабола.

351. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1$.

352. Парабола.

353. Если координаты данной точки α и β, то уравнение искомой окружности будет: $x^2+y^2-(p+\alpha)x-\frac{\beta y}{2}=0$.

354. Кривая 2-го порядка.

355. Эллипс.

356. Гипербола; если $R_1=R_2$, то перпендикуляр к прямой o_1o_2 в ее средине.

ОТДЕЛ I, В.

359. $\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$. **360.** $\sqrt{2}$.

361. $\cos v = \frac{1}{2}$. **362.** $v = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

363. $(-3, 2, 3)$.

364. $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

365. $M_1(x, y, 0)$, $M_2(x', 0, z')$, $M_3(0, y'', z'')$,
где $x = x' = \pm\frac{l}{\sqrt{2}}$, $y = y'' = \pm\frac{l}{\sqrt{2}}$, $z' = z'' = \pm\frac{l}{\sqrt{2}}$.

366. $x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{x+y-2z+1}{\sqrt{6}}$, $z' = \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}$.

367. $x = \frac{x'}{2} + \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{2}$, $y = \frac{x'}{2} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2}$, $z = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}$; $4z'^2 = a^2$.

368. $x = a + x' + y' + z'$, $x = y'$, $z = z'$.

369. $x = x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = x'\frac{1}{\sqrt{2}} + z'\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = y'\frac{1}{\sqrt{2}} + z'\frac{1}{\sqrt{2}}$.

370. $x = -x\sin\alpha + y'\cos\beta$, $y = x'\cos\alpha - y\sin\beta$, $z = z'$.

371. $x' = \pm\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}$, $y' = \pm\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}$, $z' = z$,
$(X', Y') = (X', Z')$ (Y', Z') $60°$.

372. $x = x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - \frac{1}{6}z'$, $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}y' - \frac{\sqrt{6}}{6}z'$, $z = \frac{\sqrt{6}}{2}z'$.

373. Круги пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ с плоскостями $y = \pm z$.

374. $(2x-x_0-x_1)(x_0-x_1) + (2y-y_0-y_1)(y_0-y_1) + (2z-z_0-z_1)(z_0-z_1) = 0$.

376. $C(1, 1, 1)$, $r = 1$. **377.** $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

378. Если $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ вершины, то плоскости пересекаются в точке: $x = \frac{a}{4}$; $y = \frac{b}{4}$; $z = \frac{c}{4}$.

379. $z = 1$.

380. $x-1=0$, $y-1=0$, $z-1=0$, $x+y+z=1$.

381. $3x-2y+7z-6=0$.

382. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

383. 135°.

384. $2x-y-3z=0$.

385. $x-y=0$.

386. $x+y+(4\pm 3\sqrt{2})z=2$.

387. Не лежит.

388. 6.

389. Объем $=\frac{8}{6}$.

390. $\sqrt{3}$.

391. $\delta=-\frac{x_0+2y_0-z_0+1}{\sqrt{6}}$.

392. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

393. $z_1=-\frac{2}{7}$, $z_2=-5{,}6$.

394. $x+2y=0$.

395. $2x-4y+2z-3=0$.

397. 0.

398. Если x, y, z старые координаты точки, новые координаты которой x_1, y_1, z_1, то $x_1=+\frac{x+2y+5z+1}{\sqrt{30}}$, $y_1=+\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}$, $z_1=-\frac{x+2y-z-1}{\sqrt{6}}$.

399. $x+y\pm z=a$.

400. $\frac{1}{2}\sqrt{101}$.

401. $l=\pm\sqrt{2}$.

402. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

403. $l=3$.

404. $M(1,\ 1,\ 1)$.

405. $x-1=p(y-1)+q(z-1)$, $p+q=pq$.

406. Плоскость.

407. $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{-3}$.

408. $a)\ \frac{x-0}{1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-2}{3}$, $b)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$, $c)\ \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{l}$.

409. Угол между прямыми 60°.

410. $\cos v=\frac{14}{15}$.

411. $\sin W=\sqrt{\frac{3}{5}}$.

412. Уравнение плоскости, если $M\ (a,\ b,\ c)$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$.

413. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

414. $a)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$, $b)\ y-1=0$, $z-1=0$ или $\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}$.

415. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

416. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$.

417. $2x-y-z-1=2$, $x+2y-z+2=8$.

418. $x-z+1=0$.

419. $x-2=0$, $y-1=0$.

420. $x-2y+2z-2=0$.

421. $x-2y+z-1=0$.

422. $x-6y-4z-7=0$.

423. $x-z-2+\lambda(2y-z-3)=0$.

424. $x-z-2+\lambda(2y-z-3)=0$.

425. Плоскость, проходящая через точку M_3 и прямую M_1M_2:

$$x+y+2z-5=0.$$

426. $\begin{cases} x+2y-z-1=0, \\ x+z-2=0. \end{cases}$

427. $x+2y+1=0$.

428. $\begin{cases} x + 3y = 0. \\ 3x - y + 4z - 12 = 0. \end{cases}$ **429.** $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0. \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$

430. Точка пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ с плоскостью $x + 2y - z = 0$.

431. $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0. \\ 2x - y - z + k = 0. \end{cases}$ **432.** $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0. \\ x - 1 = 0. \end{cases}$

433. Уравнения прямой: $z - 2x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$.

434. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$. **435.** $\begin{cases} x - y + 3 = 0. \\ z - 1 = 0. \end{cases}$

436. $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0. \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$ **437.** $x + y + z = 0$.

438. $\begin{cases} y + z - 2 = 0. \\ 2x + 5y + 4z + 8 = 0. \end{cases}$ **439.** $\begin{cases} x - y - 1 = 0, & z = 0. \\ x - z - 1 = 0, & y = 0. \\ y - z = 0, & x = 0. \end{cases}$

440 Искомая прямая проходит через точку пересечения прямой $x = y = z$ с плоскостью $x + 2y - z - 1 = 0$.

441. $5x + 3y - z - 1 = 0$. **442.** $x - z - 1 = 0$.

443. $\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0. \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$ **444.** $\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0. \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

445. $\begin{cases} 22x + 5y + 19z - 41 = \pm\sqrt{5}\,(2x + 11y + 7z - 9). \\ 3x + 2y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

446. $\sqrt{\frac{17}{4}} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

447. $\begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0. \\ x - 2y + 5z - 4 = \pm\sqrt{10}(x + y - z - 4). \end{cases}$

448. $N(1, 2, 0)$.

449. $\delta_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\delta_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$; $\delta_3 = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

450. $\begin{cases} x + y + z - a = 0. \\ z + a(x - 1) = 0. \end{cases}$ **451.** $\begin{cases} a(x - 1) + z = 0. \\ (a + 1)(y - 1) + z + 1 = 0. \end{cases}$

452. $z = 0$.

453. Уравнения прямой, если оси координат ребра трехгранного угла $x = y = z$.

454. $x^2 - y^2 - 2xy - 4z + 2 = 0$.

455. $x + 2y + 3z - 2 = 0$.

456. $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 2x - 2y + 4z - 1 = 0$.

457. $2x^2 + z^2 - 3xy + 3xz - 3yz - 5x + 3y + 4z + 9 = 0$.

458. $xy + xz - zy - x = 0$.

459. $7x^2 + 5y^2 - 2z^2 - 10xy + 2xz - 10yz + 18x - 36z + 27 = 0$.

460. $4x^2 - y^2 - 10xy + 4xz - 3yz + 8x + 2y + 14z = 0$.

461. $x + y = 0$.

462. $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 12xy + 4xz - 4yz + 5x + 23y + 9z + 4 = 0$.

463. $y^2 - 4z^2 - xy + 3xz + 3yz = 0$.

464. $2(y + 2x - 2)^2 + 3(z + 3x - 3)^2 = x$.

465. $12x^2 + 11y^2 + 10z^2 + 22xy + 10xz - 22yz - 56x - 26y - 8z + 45 = 0$.

466. Пересечение шара $x^2 + y^2 + z^2 - x_0x - y_0y - z_0z = 0$, радиус которого $\frac{1}{2}\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, с данною поверхностью.

467. $x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy - 8yz - 1 = 0$.

468. $x^2+4y^2+4z^2+4xy-10yz-6x-2y+2z+3=0.$

469. $\left(\frac{x}{z+h}\right)^2+\left(\frac{y}{z-h}\right)^2=\frac{R^2}{h^2}.$

470. $\left(\frac{xz_0-zx_0}{a}\right)^2+\left(\frac{yz_0-zy_0}{b}\right)^2=(z-z_0)^2.$

471. $y=x\,tg\,(az).$ 472. $\frac{a^2c^2}{b^2}\cdot y^2=x^2\,(c^2-z^2).$

473. $x^2+y^2-xz-yz-z-1=0.$

474. $xy+xz+yz=0.$ 475. Прямая.

476. $x^2+y^2-5z^2-2z-2=0.$

477. $x^2-y^2-(\sqrt{3}-1)\,xz+(\sqrt{3}-1)\,yz-x+(2-\sqrt{3})y+(\sqrt{3}-1)\,z=0.$

478. $x-y\pm\frac{x-z}{\sqrt{2}}=0.$

479. Обозначив через $2h$ кратчайшее расстояние между прямыми и через $2l$ длину отрезка движущейся прямой между двумя данными точками, получим при надлежащем выборе системы координат уравнение поверхности: $\left(\frac{x}{z+h}\right)^2+\left(\frac{y}{z-h}\right)^2=\frac{l^2}{h^2}-1.$

480. Эллипс. 481. $z^2-2xy-az+\frac{z}{2a}(x+y)^2=0.$

482. $(10x-5y-5z+2)^2+(10y-5x-5z+11)^2+(10z-5x-5y-13)^2=294.$

483. $\alpha x^2+\gamma y^2+Cz^2+2\beta xy+2Exz+2Fyz+2\delta x+2\eta y+2lz+\lambda=0.$

484. $x^2+y^2-2z-1=0.$

485. $\frac{x}{24}=\frac{y}{-52}=\frac{z}{5}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}.$

486. Уравнение поверхности: $\frac{1}{2}\left\{(x-y+z-1)^2+(x+y+z+1)^2\right\}=0.$

488. $\begin{cases}1.\ x+y+2z+5=0;\ y-(3+\sqrt{8})\,x=1+\sqrt{8}.\\ 2.\ x+y+2z+5=0;\ y-(3-\sqrt{8})\,x=1-\sqrt{8}.\end{cases}$

489. $\begin{cases}\text{Если } b^2\geqq\frac{p}{q}c^2, \text{ то } x=\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-\frac{p}{q}c^2};\ y=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}\,z.\\ \text{Если } a^2<\frac{p}{q}c^2, \text{ то их нет.}\end{cases}$

490. $C\,(1,\ 1,-1);\ x_1^2+y_1^2+z_1^2+2x_1y_1-2y_1z_1+6x_1z_1-1=0.$

491. Прямая центров $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$; $4x_1y_1+4x_1z_1-1=0.$

492. Плоскость центров $x+y+z-1=0$; $x_1^2+y_1^2+z_1^2+2x_1y_1+2y_1z_1+2x_1z_1=0.$

493. $A\,(x-x_c)^2+B\,(y-y_c)^2+C\,(z-z_c)^2+2D\,(x-x_c)(y-y_c)+2E\,(x-x_c)(z-z_c)+2F(y-y_c)(z-z_c)=0.$

494. $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0.$

495. Прямые образуют конус: $(x+2)^2+4\,(y-1)^2-40\left(z+\frac{1}{5}\right)^2=0.$

496. $2x-3y+2z-2=0.$ 497. $x+y+z=6.$

498. $x-y-z=0$; сопряжена с прямой $x=0,\ y=0.$

499. $l\,(x-1)+n\,(z-y)=0$; хорды в плоскости $y=0.$

500. $2x+y-z=0.$ 501. $\begin{cases}3x+1=0.\\ 3z-2=0.\end{cases}$

502. $\frac{x}{a^2}(x-x_0)+\frac{y}{b^2}(y-y_0)+\frac{z}{c^2}(z-z_0)=0.$

503. С прямыми, параллельными OY.

504. Искомые хорды параллельны прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$.

505. $x - 2z + 2 = 0$.

506. $z = 1$, $2x - 3y + 2z - 2 = 0$.

507. $(x - y + z - 2) - (x + 2y - z) = 0$.

508. $\frac{x}{a^2}(x - x_1) + \frac{y}{b^2}(y - y_1) + \frac{z}{c^2}(z - z_1) = 0$.

509. $\left(\frac{2}{3} \mp \sqrt{\frac{14}{3}}, \frac{2}{3}, 1 \pm \sqrt{\frac{14}{3}}\right)$.

510. $lz + aky = const.$, $l = \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}$.

511. $x + 1 = 0$, $y + 1 = 0$.

512. $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} z - 1 = 0. \\ 3x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$

513. $x = const.$, $x + y - z = const.$

514. $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 2x - 12y - 72z + 109 = 0. \\ 2x + 3z\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 2x - 12y - 72z + 109 = 0. \\ 3z\sqrt{2} - 2x = 9\sqrt{2}. \end{cases}$

515. 1) $y - x(3 + \sqrt{8}) = a$; 2) $y - x(3 - \sqrt{8}) = a$.

516. 1) $h = a^2 + b^2$; 2) $z = a$; $(a^2 + b^2 - 1)z + 2ax + 2by = 0$.

517. $x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{3}xz - yz - 1 = 0$.

518. Гипербола, расположенная в плоскости ZOX.

519. 1) $x - 2y + z = 0$; $x - y(1 + \sqrt{3}) = 0$; 2) $x - 2y + z = 0$; $x - y(1 - \sqrt{3}) = 0$.

520. $4x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

521. $y^2 - z^2 - x = 0$.

522. $x - y - z = k\sqrt{2}(\sqrt{3} - y + z)$; $x - y - z = \frac{1}{k}\sqrt{2}(\sqrt{3} + y - z)$.

523. $\begin{cases} x + 1 = kz \\ y + z + 1 = \frac{1}{k}. \end{cases}$ $\begin{cases} x + 1 = \frac{1}{k} \\ y + z + 1 = kz. \end{cases}$

524. $\begin{cases} y + 2z + 2 = k \\ 2x - y = \frac{1}{k}. \end{cases}$

525. $\begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$

526. $\begin{cases} 2y + \eta z = \frac{2 + \varepsilon\sqrt{6}}{2}(x - 8y - 8z - 2); \\ 2y - \eta z = 2 - \varepsilon\sqrt{6}; \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \eta = \pm 1 \\ \varepsilon = \pm 1 \end{pmatrix}$

527. $\begin{cases} 9y^2 - 4z^2 = x \\ x = \frac{5}{144}. \end{cases}$

528. $9x - 7y + 2z - 1 = 0$.

529. $2{,}2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

530. Окружность.

531. $\frac{3x - y + z + 1}{3} = \frac{-x + 5y - z - 3}{■} = \frac{x - y + 3z - 1}{12}$.

532. $\frac{x - \frac{1}{2}}{0} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z - z_0}{l}$.

533. $x - y + z - 1 = 0$.

534. Мнимое геом. место. **535.** Точка $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

536. $2x_1^2+3y_1^2+6z_1^2=3$; $x=-\frac{1}{3}+\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{z_1}{\sqrt{6}}$,

$$y=\frac{2}{3}+\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{2z_1}{\sqrt{6}},\quad z=\frac{2}{3}-\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{z_1}{\sqrt{6}}.$$

537. $2x_1^2+6y_1^2+6z_1^2=1$; $x=-\frac{1}{3}+\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{2}{3}+z_1$, $z=\frac{2}{3}-\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}}$.

538. Шар $6x_2^2+6y_2^2+6z_2^2=1$.

Формулы для перехода: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+x_2, \\ y=\frac{2}{3}+y_2, \\ z=\frac{2}{3}+z_2. \end{cases}$

539. Двуполый гиперболоид вращения $6x_2^2+6y_2^2-2z_2^2=-1$.

Формулы перехода: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2 \\ y=+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 \\ z=+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_2. \end{cases}$

540. *Однополый* гиперболоид $3x_2^2+6y_2^2-2z_2^2=-1$.

Формулы перехода: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_3 \\ y=+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 \\ z=+\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_2. \end{cases}$

541. Прямая $y_0=0$, $z_0=0$.

Формулы перехода: $\begin{cases} x=-1-m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}; \\ y=-2m+\frac{2x_0}{\sqrt{6}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}}; \\ z=-m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}-\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

542. Круговой цилиндр $y_0^2+z_0^2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$.

Формулы перехода: $\begin{cases} x=m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}, \\ y=2+2m+\frac{2x_0}{\sqrt{6}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}}, \\ z=1+m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}-\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

543. Эллиптический цилиндр $\frac{y_0^2}{1^2}+\frac{z_0^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=1$.

Формулы перехода: $\begin{cases} x = m - 1 + \dfrac{x_0}{\sqrt{6}} + \dfrac{y_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{z_0}{\sqrt{3}}; \\ y = 2m + \dfrac{2x_0}{\sqrt{6}} - \dfrac{z_0}{\sqrt{3}}; \\ z = m + \dfrac{x_0}{\sqrt{6}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{z_0}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

544. Гиперболический цилиндр $y_0^2 - z_0^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$.

Формулы перехода: $\begin{cases} x = m + \dfrac{x_0}{\sqrt{6}} + \dfrac{y_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{z_0}{\sqrt{3}}, \\ y = 2 + 2m + \dfrac{2x_0}{\sqrt{6}} - \dfrac{z_0}{\sqrt{3}}, \\ z = 1 + m + \dfrac{x_0}{\sqrt{6}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{2}} + \dfrac{z_0}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

545. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_1 \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{6}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_1 \\ z = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_1. \end{cases}$ $\quad 3z_1^2 - 2y_1^2 = 0.$

546. $2x_1^2 + 3y_1^2 - 6z_1^2 + 1 = 0$

547. $6z_1^2 + 6y_1^2 = \sqrt{2} x_1$

548. $6z_1^2 + 2\sqrt{3} y_1 = 0$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x - y}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \dfrac{x + y - z}{\sqrt{3}} \\ z_1 = \dfrac{x + y + 2z - 1}{\sqrt{6}} \end{cases}$

549. $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_1,$ $\quad x_1 = x_2 - \dfrac{25}{24\sqrt{6}},$

$y = \dfrac{2}{\sqrt{6}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_1,$ $\quad y_1 = y_2 - \dfrac{5}{12\sqrt{2}},$

$z_1 = z_2.$

$z = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_1,$ $\quad 6(y_2^2 + z_2^2) = \dfrac{3}{\sqrt{6}} x_2,$

550. $x'^2 + \dfrac{1}{2} y'^2 - \dfrac{1}{2} z'^2 + 1 = 0,$ $\quad \begin{cases} x = x', \\ y = \dfrac{y' + z'}{\sqrt{2}}, \\ z = \dfrac{-y' + z'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

551. $x'^2 + \sqrt{\lambda^2} + 2(y'^2 - z'^2) = 0.$

552. Две совпадающие плоскости с $x + y + z - 1 = 0$.

553. $4y^2 - 2z^2 = x.$ **554.** $\left.\begin{matrix} 13x + 18y + 26 = 0 \\ 10y + 13z = 0 \end{matrix}\right\}.$

555. $2x_1^2 + 2y_1^2 - 4z_1^2 = 1.$

556. Эллиптический цилиндр: $2y_2^2 + 3z_2^2 = 1;$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{\sqrt{6}} + \dfrac{z_2}{\sqrt{3}} + \dfrac{y_2}{\sqrt{2}}, \\ y_1 = -\dfrac{2x_2}{\sqrt{6}} + \dfrac{z_2}{\sqrt{3}} \\ z_1 = \dfrac{x_2}{\sqrt{6}} + \dfrac{z_2}{\sqrt{3}} - \dfrac{y_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$

557. $7y_2^2 - 2z_2^2 = \frac{8x_2}{\sqrt{14}}$. Гиперболический параболоид.

558. $x_2^2 + 2y_2^2 - 3z_2^2 = \pm 12$. Однополый или двуполый гиперболоид.

559. $2y_2^2 + 3z_2^2 = \sqrt{6}\, x_2$. Эллиптический параболоид

$$x = -\frac{1}{\sqrt{6}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2,$$
$$y = -\frac{1}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2,$$
$$z = -\frac{2}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} z_2.$$

560. $3\sqrt{6}\,(y_1^2 + z_1^2) = 2x_1$.

561. $y'^2(\sqrt{3} + 1) - z'^2(\sqrt{3} - 1) = 1$.

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} + \frac{z'}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}$$
$$y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} + \frac{z'}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}$$
$$z = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} y' - \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} z'.$$

562. $\lambda = \pm 1;\ \mu = \pm \sqrt{2}$.

563. $\frac{x + \frac{(1+\lambda)(1-\lambda)^2}{\lambda^2}}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - \frac{1}{\lambda}}{-\lambda}$.

554. $\begin{cases} 1)\ \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2x = (\sqrt{5}-1)\, y;\ z = 0 \\ 2)\ \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ 2x = -(\sqrt{5}+1)\, y;\ z = 0. \end{cases}$

555. $-\infty < m < -1$, эллипсоид; $m = -1$, эллиптический цилиндр; $-1 < m < \frac{1}{2}$, однополый гиперболоид; $m = \frac{1}{2}$, конус; $\frac{1}{2} < m < 1$, двуполый гиперболоид; $m = 1$, мнимая плоскость, $1 < m < \infty$, эллипсоид.

566. 1) $5(\lambda^2 + \mu^2 + 1) - (\lambda + 2\mu + 1)^2 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$; $x + 2y - z = 0$.

567. $x = 1;\ y = 0$.

568. $\begin{cases} x = y = z \\ x = y = \frac{z}{-2} \\ x = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0} \end{cases}$; $x_1^2 - y_1^2 - 2z_1^2 = 0$. Конус вращения.

569. 1) гиперболический параболоид $y_2^2 - z_2^2 = \frac{2a}{p} x_2$.

2) гиперболический параболоид $x_2^2 - z_2^2 = \frac{2a}{p} y_2$.

3) параболический цилиндр $z_2^2 = \frac{a}{p} x_2$.

570. $4(x + y + z)^2 - 3(2x - y - z)^2 + (y - z + 1)^2 = 1$.

571. $x^2 + 4y^2 + (z - 2)^2 = 5$. **572.** $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$.

ОТДЕЛ II.

---

1. 1.
2. 0.
3. 0.
4. 1.
5. -1.
6. $-\frac{1}{2}$.
7. $\frac{1}{2}$.
8. $a<1$: 0; $a=1$: $\frac{1}{2}$; $a>1$: 1.
9. $a<1$: -1; $a=1$: 0; $a>1$: $+1$.
10. 6.
11. -1.
12. $\frac{3}{7}$.
13. $\frac{m}{n}$.
14. $\frac{ps}{qr}$.
15. $\frac{5}{3}$.
16. $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$.
17. $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
18. $\frac{1}{k}$.
19. $\frac{1}{2}$.
20. 1.
21. $\frac{1}{2}$.
22. 1.
23. $\frac{15}{2}$.
24. $\frac{1}{2}$.
25. $\frac{4}{9}$.
26. $+1$, если $\lim x=+\infty$; -1, если $\lim x=-\infty$.
27. 0, если $\lim x=+\infty$; $+\infty$, если $\lim x=-\infty$.
28. 0.
29. $+1$, если $\lim x=+\infty$; -1, если $\lim x=-\infty$.
30. 0.
31. $\frac{1}{2}$, если $\lim x=+\infty$; $-\infty$, если $\lim x=-\infty$.
32. 0.
33. 0.
34. $-\frac{1}{4}$.

55. $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$.

36. $\frac{2}{k\sqrt[k]{a^{k-1}}}$.
37. $2m$.
38. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.
39. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{6}}$.
40. $\lambda=-1$, $\mu=0$.

41. $\frac{2}{3}$.
42. 5.
43. $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$.
44. x.
45. 1.
46. $\frac{2}{\pi}$.
47. $\frac{m^2}{2}$.
48. $\frac{n^2-m^2}{2}$
49. $\frac{1}{2}$.
50. $2\cos a$.
51. $-\sin a$.
52. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
53. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
54. $\frac{1}{4}$.
55. 0.
56. 1.
57. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$.
58. 4.
59. 0.
60. e^{-2}.
61. 0.
62. 0.
63. $\frac{4}{9}$.
64. 1, если $a < 1$; a, если $a > 1$.
65. $\sqrt{ab}$.
66. $e^{\frac{p}{q}}$.
67. e^3.
68. $e^{\frac{3}{2}}$.
69. 1.
70. $e^{-\frac{x^2}{2}}$.
71. $e^{\lambda x}$.
72. 0.
73. $e^{b \cot a}$.
74. $\alpha-\beta$.
75. $\log\frac{a}{b}$.
76. 1.
77. 1.
78. e^x.
79. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.
80. $-\frac{\pi^2}{2}$.
81. 2π.
82. 1.
83. 1, если $x=+\infty$; 0, если $x=-\infty$.
84. $\log a$.
85. $\log a$.
86. $(\log a)^2$.
87. 1.
88. $\log 2$.
89. $\frac{a}{4}$.
90. $\frac{1}{1-x}$.
91. $\frac{x_0+2x_1}{3}$.
92. $\left.\begin{aligned} a_n &= a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ b_n &= a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)\end{aligned}\right\}$ $\lim a_n=\lim b_n=\frac{a_0+2b_0}{3}$.
93. $\frac{a_n-\sqrt{a_0b_0}}{a_n+\sqrt{a_0b_0}}=\left(\frac{a_0-\sqrt{a_0b_0}}{a_0+\sqrt{a_0b_0}}\right)^{2^n}$, $a_nb_n=a_0b_0$;
$\lim a_n=\lim b_n=\sqrt{a_0b_0}$.
94. $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.
97. 0.

99. Порядки малости: $\frac{2}{3}$, 3, 2, 1, 2, 2, $\frac{1}{2}$.

100. Часть CD — первого порядка, а часть DB — третьего.

101. Радиус искомого круга $= p$.

102. Расстояние NR, по крайней мере, 2-го порядка.

103. Линия — первого порядка. 104. Функция непрерывна.

105. $\frac{9}{8}$.

106. $\frac{15-\sqrt{33}}{8}$ и $\frac{15+\sqrt{33}}{8}$.

107. При $x = 1$.

108. При значениях x, равных квадратам целых чисел.

109. При $a = 0$.

110. Функции y и z можно рассматривать в промежутках $(-\infty, -1)$ или $(+1, +\infty)$; функцию u можно рассматривать в промежутке $(+1, +\infty)$; при этом y задана при $x = 1$.

111. $(-\infty, 1)$ или $(2, +\infty)$. 112. $(-3, +\infty)$ или $(-\infty, -3)$.

113. $(-\infty, +\infty)$.

114. Функции y и z можно рассматривать соответственно в промежутках $(0, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.

121. $y = x$, если $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $y = \pi - x$, если $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$; $y = x - 2\pi$, если $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ и т. д.

122. $y = x$, если $0 \leq x \leq \pi$; $y = 2\pi - x$, если $\pi \leq x \leq 2\pi$; $y = x - 2\pi$, если $2\pi \leq x \leq 3\pi$ и т. д.

123. $y = x$, если $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; $y = x - \pi$, если $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$; $y = x - 2\pi$, если $\frac{5\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$ и т. д.

124. $y = [x]$, где $[x]$ означает целую часть числа x.

127. При $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, где k — целое число.

128. При $x = k\pi$, где k — целое число, не равное 0.

129. $x = \pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}, \pm\frac{5\pi}{8}$, и т. д.

130. $x = \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{3\pi}{6}, \pm\frac{5\pi}{6}$ и т. д.

131. $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5$ и т. д. 132. $x = 1$.

133. 1,648. 134. 4,11.

139. $y' = 8x^3 - 6x + 1$.

140. $y' = 1 - x + x^2 - x^3 = \frac{1-x^4}{1+x}$.

141. $y' = 2x - 3$.

142. $y' = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6$.

143. $y' = \frac{5-12x}{x^6}$.

144. $y' = \frac{4a - 18a^2x^2}{3x^5}$.

145. $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

146. $y' = \frac{2-2x^2}{(x^2-x+1)^2}$.

147. $y' = \frac{nx^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$.

148. $y' = \frac{(p-m)\,x^{p+m-1} - pa^m x^{p-1}}{(x^m - a^m)^2}$.

149. $y' = \frac{(2-n)x^2 - (n-1)(a+b)x - nab}{x^{n+1}}$.

150. $y' = \frac{3}{4}(x-1)^{-\frac{1}{4}}$

151. $y' = \frac{2x+a+b}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

152. $y' = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. 153. $y' = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$.

154. $y' = \frac{1-x^2}{(1-x+x^2)\sqrt{1-x^2+x^4}}$. 155. $y' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

156. $y' = (1+x^{1/3})^2$. 157. $y' = \frac{1}{6\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{2/3}}$.

158. $y' = \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} - \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}$.

159. $y' = 2xe^{x^2}$. 160. $y' = (2ax+b)e^{ax^2+bx}$.

161. $y' = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. 162. $y' = (-2bx^2 - 2ax + b)e^{-x^2}$.

163. $y' = 2^x(x\,log\,2 + 1 - log\,2)$. 164. $y' = 2^{-x^2}(1 - 2x^2\,log\,2)$.

165. $y' = m\cos mx$. 166. $y' = \sin 2x$.

167. $y' = 2x\cos x^2$. 168. $y' = 15(\sin 5x)^2\cos 5x$.

169. $y' = -\frac{ab}{x^2}\cos\frac{b}{x}$.

170. $y' = b\cos bx\cos ax - a\sin bx\sin ax$.

171. $y' = \frac{x\,tg\,x(2x+\sin 2x)}{\cos^2 x}$.

172. $y' = \frac{1 - x\,cotg\,x}{\sin x}$. 173. $y' = \frac{2x - \sin 2x}{2(x\cos x)^2}$.

174. $y' = \frac{1}{2}e^x\cos x(3\cos 2x + \sin 2x - 1)$.

175. $y' = 3\,log\,a \cdot a^{\sin^3 x}\sin^2 x\cos x$.

176. $y' = -\frac{2^{tg\frac{1}{x}}\,log\,2}{\left(x\cos\frac{1}{x}\right)^2}$.

177. $y' = \frac{b}{a+bx}$. 178. $y' = \frac{1}{x\,log\,x}$.

179. $y' = \frac{3x+4}{x^2+2x}$. 180. $y' = log\,x$.

181. $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 182. $y' = -\frac{1}{2(1-x+\sqrt{1-x})}$.

183. $y' = (2ax+b)\,cotg\,(ax^2+bx+c)$.

184. $y' = \frac{1 - n\,log\,x}{x^{n+1}}$.

165. $y' = \frac{2a}{\sin 2(ax+b)}$. 186. $y' = -\frac{\sin(log\,x)}{x}$.

187. $y' = -\frac{5}{x^2-x-6}$. 188. $y' = \frac{x - 2x^3 - 2x\sqrt{1-x^2} - 1}{(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

189. $y' = \frac{20x^3}{x^2-x^4-6}$. 190. $y' = \frac{2x^2-3x-1}{x^3-2x^2-x+2}$.

191. $y' = x^3(log\,x)^2$. 192. $y' = -\frac{x^4+1}{x(x^4-1)}$.

193. $y' = \frac{1}{\sin^3 x}$. 194. $y' = tg^3 x$.

195. $y' = \frac{1}{\cos^4 x}$. 196. $y' = \frac{1+\sin^2 x}{\sin^4 x}$.

197. $y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

198. $y' = \frac{\pm 1}{x\sqrt{x^2-1}}$; знак $-$, если $x > 1$; знак $+$, если $x < -1$.

199. $y' = +1$, если $\cos x > 0$; $y' = -1$, если $\cos x < 0$.

200. $y' = \frac{\pm 1}{x\sqrt{x^2-1}}$; знак $+$, если $x > 1$; знак $-$, если $x < -1$.

201. $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, если $x > 0$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, если $x < 0$.

202. $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

203. $y' = \frac{\sqrt{2}}{3x^2+2x+1}$.

204. $y' = \frac{\sqrt{2}}{(3x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

205. $y' = \pm \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$; знак одинаков со знаком $4x^2-1$.

206. $y' = -\frac{5\sqrt{3}}{(3+4x^2)\sqrt{4-3x^2}}$.

207. $y' = +\frac{2x}{1-x^2}$, если $x^2 < 1$ и $y' = -\frac{2x}{1-x^2}$, если $x^2 > 1$.

208. $y' = -\frac{2}{1+x^2}$, если $x > 0$ и $y' = \frac{2}{1+x^2}$, если $x < 0$.

209. $y' = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

210. $y' = \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$.

211. $y' = \frac{1}{1-\sin^4 x}$.

212. $y' = \arcsin x$.

213. $y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}$, если $x > \frac{1}{\sqrt{8}-2}$; $y' = \frac{-1}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}$, если $x < \frac{-1}{\sqrt{8}+2}$.

214. $y' = \frac{x^4+1}{x^2+1}$.

215. $y' = -\frac{1}{\sqrt[3]{x(1+x)^4}}$.

216. $y' = x^x(1+\log x)$.

217. $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$.

218. $y' = x^{x^2+1}(1+2\log x)$.

219. $y' = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \left\{\frac{1}{x+1} + \log\frac{x}{x+1}\right\}$.

220. $y' = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right)$.

221. $y' = (\sin x)^{\sin x}\cos x\,(1+\log\sin x)$.

222. $y' = +1$, если $x > 0$, $y' = -1$, если $x < 0$.

223. $y' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, если $x \neq 0$; $y' = 0$ при $x = 0$.

224. $y = \frac{bx^2}{2a}$ при $0 \leq x < a$; $y = \frac{cx^2}{2a} - \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2}$ при $a \leqq x < \infty$; $y' = \frac{bx}{a}$ при $x < a$, $y' = \frac{cx}{a}$ при $x > 0$. Производная не существует при $x = a$.

225. Если $0 \leq x < \frac{3a}{2}$, то $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Если $\frac{3a}{2} \leq x < \frac{5a}{2}$, то $y = \sqrt{4ax - x^2 - 3a^2}$.

Если $\frac{5a}{2} \leq x < \frac{11a}{2}$, то $y = \frac{4a - x}{\sqrt{3}}$.

Если $\frac{11a}{2} \leq x < \frac{13a}{2}$, то $y = -\sqrt{12ax - x^2 - 35a^2}$.

Если $\frac{13a}{2} \leq x < 8a$, то $y = \frac{x - 8a}{\sqrt{3}}$.

226. Уравнения парабол:

$$y = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(5r - x - \frac{4x^2}{r}\right).$$

$$y = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(5r + x - \frac{4x^2}{r}\right).$$

227. $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

$$1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = \frac{1 + x - (n+1)^3 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

228. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} ctg\, t$.

229. $\frac{dy}{dx} = ctg\, \frac{t}{2}$.

230. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} tg\, t$.

231. $\frac{dy}{dx} = -tg \frac{k+1}{2} t$.

232. $\frac{dy}{dx} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}$.

233. $\frac{dy}{dx} = -1$.

234. $\frac{dy}{dx} = -1$, если $0 < t < 1$; $\frac{dy}{dx} = +1$, если $-1 < t < 0$.

235. $\frac{dy}{dx} = +1$, если $t > 0$; $\frac{dy}{dx} = -1$, если $t < 0$.

236. 2.

237. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

238. $17 + 12\sqrt{2}$ и $17 - 12\sqrt{2}$.

239. $\frac{3}{5} \cdot 8! = 24192$.

240. $\frac{42}{125} x$^[illegible].

241. $x^2 (60 \log x + 47)$.

242. $(3 \log a)^3 \cdot a^{3x}$.

243. $\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)a}{x^{m+4}}$.

244. $\frac{-6}{(x-1)^4}$.

245. $-\frac{60x}{(x-2)^5}$.

246. $16e^{2x}(x^2 + 4x + 3)$.

247. $(81x^2 - 108) \cos 3x + 216x \sin 3x$.

248. $4 \sin 2x$.

249. $\frac{81 \sin 3x + \sin x}{4}$.

250. $-8x \cos 2x - 16 \sin 2x$.

251. $-4e^x \sin x$.

239. $2 \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

257. $(-1)^{n-1} \frac{ab^{n-1} n!}{(a + bx)^{n+1}}$.

258. $\frac{(-1)^n n!}{2c}\left\{\frac{ac + b}{(x-c)^{n+1}} + \frac{ac - b}{(x+c)^{n+1}}\right\}$.

259. $(-1)^n n! \left\{ \frac{9}{(x-2)^{n+1}} - \frac{5}{(x-1)^{n+1}} \right\}$.

260. $(-1)^{n-1} (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{n! \gamma^{n-1}}{(\gamma x + \delta)^{n+1}}$.

261. $\frac{(-1)^n n!}{2a} \left\{ \frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right\}$.

262. $(-1)^n n! \left\{ \frac{2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+1}} \right\}$.

263. $(-1)^n n! \left\{ \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+1}} \right\}$; $n > 1$.

264. $(-1)^n n! \left\{ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{n+1}{x^{n+2}} \right\}$.

265. $\frac{(-1)^{n-1} (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$.

266. $(-1)^{n-1} (n-1)! a^n \left\{ \frac{1}{(ax+b)^n} - \frac{1}{(ax-b)^n} \right\}$.

267. $(-1)^{n-1} (n-1)! \left\{ \frac{1}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x-2)^n} \right\}$.

268. $(-1)^{n-1} (n-1)! \left\{ \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n} - \frac{2}{(x-2)^n} \right\}$.

269. $(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} a^n (ax+b)^{-\frac{2n+1}{2}}$.

270. $(-1)^{n-1} \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{3^{n-1}} a^n (ax+b)^{-\frac{3n-2}{3}}$; $n > 1$.

271. $-2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$. 272. $2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

273. $\frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

274. $\frac{3^n}{2} \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{5^n}{4} \sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

275. $3 \cdot 2^{n-3} \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{2n-3} \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) -$
$- 27 \cdot 6^{n-3} \sin\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2^{3n-4} \sin\left(8x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

276. $m^{n-3} e^{mx} [m^3x^3 + 3n m^2x^2 + 3n(n-1) mx + n(n-1)(n-2)]$.

277. $a^{n-2} \left[a^2x^2 \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) - 2n ax \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) - \right.$
$\left. - n(n-1) \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \right]$.

278. $2^{n-1} e^{2x} \left[1 + 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \right]$.

279. $e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + n\varphi)$; $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

280. $\frac{3}{2\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{2n-1}{4}\pi\right) - \frac{3^n}{2\sqrt{2}} \sin\left(3x + \frac{2n-1}{4}\pi\right)$.

261. $\frac{1}{2}e^{ax}\left\{a^n - (a^2+4b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(2bx+2c+n\varphi)\right\}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+4b^2}}$; $\sin\varphi = \frac{2b}{\sqrt{a^2+4b^2}}$.

282. $\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-1}}(2x-3n+6)$ при $n \geqq 3$.

283. $\frac{(-1)^n\, 6\,(n-4)!}{x^{n-3}}$ при $n \geqq 4$. 284. $\frac{(n-1)!}{x}$.

285. $\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^{n+1}}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log(1+x)\right\}$.

286. $\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}f(a)$.

288. 0 при $n<k$; $(n-k+1)(n-k+2)\ldots n\,.\,a^{n-k}$ при $n \geqq k$.

289. $1\,.\,2\,.\,3\ldots 2k$, если $n=2k+1$; 0, если $n=2k$.

290. $\{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k-1)\}^2$, если $n=2k+1$; 0, если $n=2k$.

291. $(2\,.\,4\,.\,6\ldots 2k)^2$, если $n=2k+1$; 0, если $n=2k$.

292. $2\{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2k-2)\}^2$, если $n=2k$; 0, если $n=2k+1$.

293. $(-1)^{p-1}m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(2p-1)^2]$, если $n=2p+1$; 0, если $n=2p+2$.

294. $-e^{\frac{m\pi}{2}}m(m^2+1^2)(m^2+3^2)\ldots[m^2+(2p-1)^2]$, если $n=2p+1$; $e^{\frac{m\pi}{2}}m^2(m^2+2^2)\ldots(m^2+4p^2)$, если $m=2p+2$.

295. $-2\,.\,(n-1)!\cos n\alpha$.

296. $(-1)^n\left[(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}(2x)^{n-4}-\ldots\right]$.

299. $\frac{\partial u}{\partial x}=3(x^2-y)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=3(y^2-x)$; $du=3(x^2-y)\,dx+3(y^2-x)\,dy$.

300. $\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2-3y^2$; $\frac{\partial u}{\partial y}=9y^2-6xy$;
$du=(6x^2-3y^2)\,dx+(9y^2-6xy)\,dy$.

301. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2x}{(x+y)^2}$; $du=\frac{2y\,dx-2x\,dy}{(x+y)^2}$.

302. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{4yx^2}{(x^2-y^2)^2}$; $du=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}\{x\,dy-y\,dx\}$.

303. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{x^2y}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{xy^2}$; $du=\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\{y\,dx-x\,dy\}$.

304. $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y+y\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x+x\cos y$;
$du=(\sin y+y\cos x)\,dx+(\sin x+x\cos y)\,dy$.

305. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$; $du=\frac{2}{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy)$.

306. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$; $du=\frac{2}{y\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dy-y\,dx)$.

307. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)}$; $du=\frac{1}{(x^2+y^2)}(y\,dx-x\,dy)$.

308. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^x\log y$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xy^{x-1}$; $du=y^{x-1}(y\log y\,dx+x\,dy)$.

309. $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y \,.\, x^{\sin y - 1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\sin y} \cos y \,.\, \log x$;
$du = x^{\sin y}\left(\frac{\sin y}{x}\,dx + \log x \,.\, \cos y\,dy\right)$.

310. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

$du = \frac{x\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,(y\,dx - x\,dy)$; $y > 0$.

311. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$; $du = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

312. $du = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$.

313. $du = (2x+y+z)\,dx + (2y+x+z)\,dy + (2z+x+y)\,dz$.

314. $du = 2\cos(x^2+y^2+z^2)\,.\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$.

315. $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$. **316.** $du = \frac{byz\,dx + (ax^2+bxz)\,dy - bxy\,dz}{(ax+bz)^2}$.

317. $du = \frac{e^{\frac{x}{y}}\,y\,dx - (xe^{\frac{x}{y}} + ze^{\frac{z}{y}})\,dy + y\,e^{\frac{z}{y}}\,dz}{y^2}$.

318. $du = zy(xy)^{z-1}dx + zx(xy)^{z-1}dy + (xy)^z\log(xy)\,dz$.

319. $du = z^{xy}\log z(y\,dx + x\,dy) + xy\,.\,z^{xy-1}\,dz$.

320. $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **321.** $du = \frac{(y^2+z^2)\,dx - xy\,dy - xz\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

326. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$.

328. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{y}{(1-y^2)^{3/2}}$.

329. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}(1 + y\log x)$.

330. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a^2\cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2ab\cos 2(ax+by)$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2b^2\cos 2(ax+by)$.

331. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{2}{(x+y)^3}$. **332.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} = 12\,\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}$.

333. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

334. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)\,e^{xyz}$.

335. 0. **336.** 0.

337. $d^2u = e^{xy}(y\,dx + x\,dy)^2$.

338. $d^2u = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\left[(y\,dx - x\,dy)^2 + (x\,dx + y\,dy)^2\right]$.

339. $d^2u = -\sin(x+y+z)\,(dx+dy+dz)^2$.

340. $d^4u = 24\,[dx^4 + 4dx^3\,dy + 2dx\,dy^2\,dz - 3dx\,dy\,dz^2 + dz^4]$.

341. См. предыдущий ответ.

342. $d^4u = 24\,[dx^4 + 3dx^3\,dy + dz^4]$.

343. $d^3u = 6dx\,dy\,dz$.

344. $du = \varphi'(xy)(ydx + xdy)$;
$d^2u = \varphi''(xy)(ydx + xdy)^2 + 2\varphi'(xy)\,dx\,dy$.

345. $du = 2\varphi'(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$;
$d^2u = 4\varphi''(x^2 + y^2)(xdx + ydy)^2 + 2\varphi'(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)$.

346. $du = 2\varphi'(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy + zdz)$;
$d^2u = 4\varphi''(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy + zdz)^2 +$
$+ 2\varphi'(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.

347. $du = \varphi'(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz)$;
$d^2u = \varphi''(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz)^2$.

348. $du = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(adx + bdy + cdz) + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(a'dx + b'dy + c'dz)$.

$d^2u = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}(adx + bdy + cdz)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}(a'dx + b'dy + c'dz)^2 +$
$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}(adx + bdy + cdz)(a'dx + b'dy + c'dz)$.

349. $du = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(xdx + ydy) + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(xdy + ydx)$.

$d^2u = 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}(xdx + ydy)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}(xdy + ydx)^2 +$
$+ 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}(xdx + ydy)(xdy + ydx) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(dx^2 + dy^2) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dxdy$.

350. $du = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)dy$.

$d^2u = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right)dx^2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)dxdy +$
$+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right)dy^2$.

351. $du = a\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}dx + b\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dy + c\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}dz$.

$d^2u = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}dx^2 + b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}dy^2 + c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}dz^2 + 2ab\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}dxdy +$
$+ 2ac\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\zeta}dxdz + 2bc\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\partial\zeta}dydz$.

$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}adx + \frac{\partial}{\partial\eta}bdy + \frac{\partial}{\partial\zeta}cdz\right)^n\varphi(\xi, \eta, \zeta)$.

352. ρ. **353.** $\rho\sin 2\varphi$.

354. $\rho^2\sin\varphi$.

363. $y' = \frac{e^y}{2 - y}$. **363**-bis. $y' = \frac{2y^2}{n(y^2 - x^2) + 2xy}$.

364. $y' = \frac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y}$.

364-bis. $y' = \frac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$.

365. $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$; $y'' = -\frac{2y^2 + 2}{y^5}$.

365-bis. $y' = \frac{1}{1 - \alpha\cos y}$; $y'' = -\frac{\alpha\sin y}{(1 - \alpha\cos y)^3}$.

366. $y' = 0$, $y'' = 1$, $y''' = -3$. **367.** $y' = 0$, $y'' = -\frac{1}{3}$, $y''' = \frac{1}{3}$.

368. $(y - b)y^{(4)} + 4y'y''' + 3y''^2 = 0$.

369. $y' = \pm 1$.

370. $y' = \pm\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$; $b^2 \geqq a^2$. При $b^2 < a^2$ не существует функции, принимающей при $x = 0$ значение $y = 0$.

371. $y' = 1,\ z' = 0;\ y'' = -\frac{2}{3},\ z'' = -\frac{2}{3}.$

372. $y' = -\frac{4x}{5y},\ z' = \frac{x}{5z};\ y'' = -\frac{20y^2 + 16x^2}{25z^3},\ z'' = \frac{5z^2 - x^2}{25z^3}.$

373. $x' = 5,\ y' = 3;\ x'' = -20,\ y'' = 12.$

374. $\frac{\partial z}{\partial x} = -tg\, x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -tg\, y.$

375. $d^2z = \frac{4}{15}(dx^2 + dy^2).$

376. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{5}{18},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{18}.$

377. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 - x}{1 + z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + z},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x - 2)}{(1 + z)^3}.$

378. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}.$

379. $dz = -\frac{y + z}{x + y}dx - \frac{z + x}{x + y}dy,$

$d^2z = \frac{2(y + z)}{(x + y)^2}dx^2 + \frac{4z}{(x + y)^2}dx\,dy + \frac{2(z + x)}{(x + y)^2}dy^2,$

$d^3z = -\frac{6(y + z)}{(x + y)^3}dx^3 - \frac{6(y + 3z)}{(x + y)^3}dx^2\,dy - \frac{6(x + 3z)}{(x + y)^3}dx\,dy^2 - \frac{6(z + x)}{(x + y)^3}dy^3.$

380. $du = \frac{y - u}{x - y}dx + \frac{y - v}{x - y}dy;\ dv = \frac{x - u}{y - x}dx + \frac{x - v}{y - x}dy,$

$d^2u = \frac{2y(y - u)}{(x - y)^2}dx^2 + \frac{2y(y - v + u - x)}{(x - y)^2}dx\,dy + \frac{2y(v - x)}{(x - y)^2}dy^2,$

$d^2v = -d^2u.$

381. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{55}{32},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{25}{32},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +\frac{25}{32};\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{25}{32},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{25}{32},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{55}{32}.$

382. $\frac{dx}{dz} = \frac{\varphi'(t)}{k},\ \frac{dy}{dz} = \frac{\psi'(t)}{k}.$

383. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}\sin v\, cotg\, u,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b}\cos v\, cotg\, u.$

385. $\frac{d^2x}{dy^2} + x = e^y.$

386. $\frac{d^3x}{dy^3} = 0.$

387. $\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$

388. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$

389. $\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0.$

390. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

391. $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$

392. $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$

393. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

394. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4m^2y = 0.$

395. $\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + e^{u+t} = 0.$

396. $\frac{d^2u}{dv^2} - v\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 0.$

397. $\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} = \frac{A}{(\beta - \alpha)^2}u.$

398. $\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$

399. $\frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''};\ r' = \frac{dr}{d\theta}.$

400. $-\frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$

401. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$

402. $w = \frac{\partial u}{\partial \theta}.$

402-bis. $w = r\frac{\partial u}{\partial r}\cos 2\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\sin 2\theta$.

403. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$. 403-bis. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$.

404. $u\frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$. 405. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$.

406. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = 0$.

407. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2\frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3)\frac{\partial z}{\partial v} + u^2v^2z = 0$.

408. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. 409. $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

410. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$.

411. $\alpha = a$, $\beta = b$ или $\alpha = b$, $\beta = a$, если a не $= b$; при $a = b$ задача невозможна.

412. $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0$.

413. $\frac{d^4u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{du}{dr} = 0$.

414. $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0$.

415. $\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2$

$\Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$.

416. $\frac{dY}{dX} = x$; $y = X\frac{dY}{dX} - Y$.

417. $\frac{\partial Z}{\partial X} = p$, $\frac{\partial Z}{\partial Y} = -y$; $z = Z - \frac{\partial Z}{\partial Y}Y$.

418. Если $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $P = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$, $R = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $S = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$, $T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$, то $P = x$, $Q = y$, $R = \frac{t}{rt - s^2}$, $S = -\frac{s}{rt - s^2}$, $T = \frac{r}{rt - s^2}$.

419. $1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$

420. $\sum_{n=0}^{\infty}[1 + 2(-1)^n]x^n$. 421. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[3 - 3n - \frac{7}{2^{n+1}}\right]x^n$.

422. $-\frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

423. $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \ldots$ 424. $1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \ldots$

425. $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{3^{2k}+1}{(2k)!}x^{2k} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{3^{2k+1}+1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$.

426. $bx + abx^2 + \frac{1}{3!}(3a^2b - b^3)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{[(a+bi)^n - (a-bi)^n]}{2i}x^n + \ldots$

427. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots$

428. $1 + x\operatorname{cotg} a + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin a}\right)^2\cos 2a + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{\sin a}\right)^n\cos na + \ldots$

429. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cos\frac{2\pi n}{3}\frac{x^n}{n}$.

430. $1+\frac{3}{2}x+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{4n-1}{2n}x^n+\ldots$

431. $\log 2-\frac{3}{2}x-\ldots-\frac{2^n+1}{2^n}\frac{x^n}{n}-\ldots$

432. $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)a^{2n+1}}+\ldots$

433. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$ для $x^2\leqslant 1$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots$ для $x^2\geqslant 1$

Указание: $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

434. $1-\frac{1}{2}x^2-\ldots-\frac{(n-1)}{n!}x^n-\ldots$

435. $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$

436. $x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\ldots$

437. $1+\frac{3}{2}x+2\left[\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n(n+1)}+\ldots\right]$.

438. $\frac{\mu}{1}x-\frac{\mu(\mu^2-1^2)}{3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{\mu(\mu^2-1^2)\ldots[\mu^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$

439. $\frac{x^2}{1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{x^8}{4}+\ldots+\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n-2}{3\cdot 5\cdot 7\ldots 2n-1}\cdot\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$

440. $\log 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^4}{2^3\cdot 4!}+\ldots$ 441. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}x^4+\ldots$

442. $e\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\ldots\right]$. 443. $1-\frac{nx^2}{1\cdot 2}+\frac{n(3n-2)}{4!}x^4+\ldots$

444. $\frac{x^2}{2}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots$ 445. $-x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^6}{4}+\ldots$

446. $x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{40}x^5+\ldots$ 447. $\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\ldots$

448. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$ 449. $1+2x+4x^2-8x^3+\ldots$

450. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\ldots$

451. $1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4-\frac{5}{4}x^5+\ldots$

452. $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{9x^5}{5!}+\ldots$

453. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x-\frac{1}{720}x^3+\frac{1}{6!\,42}x^5+\ldots$

454. $2-4(x+1)+6(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$.

455. $-2z-\frac{2}{3}z^3-\ldots-\frac{2}{2n-1}z^{2n-1}-\ldots$, где $z=\frac{1-x}{1+x}$.

456. $\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots$, где $x>-\frac{1}{2}$.

457. $y=a-x\sqrt{1+a^2}+\frac{a}{2}\left[x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}x^6-\ldots+\right.$
$\left.+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots 2n-3}{4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n}+\ldots\right]$.

458. $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{27}\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$

459. $1+(x+y)+\dots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\dots$

460. $\sum\sum\frac{x^n y^m}{nm}$.

461. $x-y-\frac{x^3-y^3}{3}+\frac{x^5-y^5}{5}-\dots$

462. $\sum\frac{(x+y)^n-x^n \quad y^n}{n}$.

463. $8,617 < x < 8,618$.
464. $3,004 < x < 3,005$.
465. $2,0022 < x < 2,0023$.
466. $2,0012 < x < 2,0013$.
467. $0,0174 < x < 0,0175$.
468. $0,999 < x < 1$.
460. $0,08809 < x < 0,08810$.
470. $0,17364 < x < 0,17365$
471. $0,9848 < x < 0,9849$.
472. $0,309 < x < 0,310$.
473. $0,5877 < x < 0,5878$ $0,8090 < x < 0,8091$.
474. $0,693 < \log 2 < 0,694$.
475. $\frac{1}{6}$.
476. 1.
477. $-\frac{1}{2}$.
478. $\frac{11}{12}$.
479. 1.
480. $\frac{1}{a}$.
481. $\frac{1}{2}$.
482. $\frac{2}{3}$.
463. $\frac{\pi^2}{6}$.
464. $-\frac{1}{3}$.
485. $-\frac{1}{2}$.
486. $-\frac{e}{2}$.
487. 2.
488. $\frac{1}{3}$.
489. $\frac{m}{e}$.
490. $3a$.
491. 0.
492. 0.
493. $-e$.
494. 1.
495. $\frac{m^2}{2}$.
496. -6.
497. 2.
498. $\frac{2e}{1-e}$.
499. $\frac{1}{6}$.
500. $-\frac{25}{2}$.
501. 4.
502. $\frac{1}{2}$.
503. 0.
504. 1.
505. 0.
500. 1.
507. 0.
508. 0.
509. 1.
510. 1.
511. 0.
512. 0.
513. $\frac{2}{\pi}$.
514. $\frac{1}{2}$.
515. $\frac{1}{a}$.
516. 1.
517. 1.
518. $e^{-\frac{\ }{2}}$
519. $\frac{1}{e}$.
520. e^{2a}.

521. 1.
522. e^{-10}.
523. 1.
524. $\frac{1}{a \log a}$.
525. $e^{\frac{2}{\pi}}$.
526. e^{-a}.
527. $e^{\frac{1}{3}}$.
528. e.
529. 1.
530. 1.
531. 1.
532. 1.
533. 1.
534. 1.
535. 1.
536. 1.
537. e^2.
538. $e^{\frac{a}{c}}$.
539. 1.
540. e.
541. $\frac{1}{5}$.
542. 0.
543. -1.
544. $\frac{1}{2}$.
545. 0.
555. Max. y при $x = -\frac{5}{7}$, min. при $x = 1$.
556. Min. y при $x = \frac{1}{e}$.
557. Min. y при $x = e$.
558. Min. y при $x = b$.
559. Max. y при $x = 1$, min. y при $x = 3$.
560. Max. y при $x = 1$; min. y при $x = 5$.
501. Функция не имеет ни max. ни min.
562. Функция не имеет ни max. ни min.
563. Max. y при $x = 1$; min. y при $x = 0$ и $x = 7$.
564. Max. y при $x = -4$ и $x = 3$; min. y при $x = -3$ и $x = 4$.
565. Max. y при $x = 2$; min. y при $x = 1$ и $x = 3$.
566. Max. y при $x = 0$; min. y при $x = 2$.
567. Max. y при $x = 1$; min. y при $x = 3$.
558. Max. y при $x = \frac{a}{3}$ и при $x = -a$; min. y при $x = -\frac{a}{2}$.
569. Max. y при $x = 1$; min. y при $x = -1$.
570. Min. y при $x = \frac{a}{4}$.
571. Min. y при $x = 0$; $\lim (y)_{x=-2} = \infty$.
572. Max. y при $x = \frac{a^2}{a-b}$; min. y при $x = \frac{a^2}{a+b}$.
573. Max. y при $x = 4$; min. y при $x = 16$.
574. Min. y при $x = a$.
575. Max. y при $x = 1$; min. y при $x = 0$ и $x = 7$.
576. Max. y при $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
577. Max. y при $x = \frac{9}{11}$, $x = 2$; min. y при $x = -2$, $x = 1$.
578. Max. y при $x = -\frac{1}{3}$, $x = 2$; min. y при $x = -2$, $x = 1$.

579. Функция убывающая, не существует в промежутке $-2 < x < 3$; разрывы непрерывности при $x = -2$, $x = 3$; $\lim (y)_{x=\pm\infty} = 0$.

580. Max. y при $x=+1$ и $x=-1$; min. y при $x=0$; $lim(y)_{x=\pm\infty}=0$.

581. Min. y при $x=0$ и $x=\sqrt{e}$; разрыв непрерывности при $x=1$; $lim(y)_{x=+\infty}=\infty$.

582. Max. y при $x=log\,2$; $lim(y)_{x=+\infty}=0$; $lim(y)_{x=-\infty}=-\infty$.

583. Max. y при $x=-\pi$; min. y при $x=\pi$.

584. Max. y при $x=\pi$, min. y при $x=0$.

585. Max. y при $x=\frac{5\pi}{4}$, min. y при $x=\frac{\pi}{4}$.

586. Функция постоянно возрастает, так как производная остается положительной.

587. Max. y при $x=0$; min. y при $x=\pm 1$.

588. Max. y при $x=\frac{(4k+1)}{2}\pi$, min. y при $x=\frac{4k+3}{2}\pi$.

589. Min. y при $x=0$.

590. Max. y при $x=\frac{\pi}{8}$, min. y при $x=0$.

591. Период функции π; в промежутке $0\leqslant x<\pi$: max. y при $x=\frac{\pi}{6}$, min. y при $x=\frac{5\pi}{6}$.

592. Период функции 6π; в промежутке $0\leqslant x<6\pi$: min. y при $x=\frac{3\pi}{2}$, max. y при $x=\frac{9\pi}{2}$.

593. Период функции 12π; в промежутке $0\leqslant x<12\pi$: max. y при $x=0$, $\frac{24\pi}{5}$, $\frac{36\pi}{5}$; min. y при $x=\frac{12\pi}{5}$, 6π и $\frac{48\pi}{5}$.

594. Период функции π; в промежутке $0\leqslant x<\pi$: max. y при $x=\frac{\pi-a}{2}$, min. y при $x=\pi-\frac{a}{2}$.

595. Max. $y=2$ при $x=-\frac{1}{2}$. **596.** Max. $y=2$ при $x=\frac{1}{2}$.

597. Min. y при $x=a$.

598. Max. $y=0$ при $x=1$; min. $y=-\frac{1}{2}$ при $x=\frac{1}{2}$.

599. Max. $y=1$ при $x=1$.

600. Функция не имеет ни max. ни min., так как производная сохраняет постоянное значение.

601. Функция не имеет ни max. ни min., так как в промежутке возможного задания функции производная не обращается в нуль.

602. Max. $y=-3a$ при $x=\frac{3a}{2}$.

603. Max. при $x=a$; min. при $x=-a$.

604. Max. $y=a\sqrt[3]{4}$ при $x=a\sqrt[3]{2}$.

605. Min. $y=-a$ при $x=\pm a$; при $y=-\frac{8a}{9}$ значения $x=\pm\frac{4a\sqrt{6}}{9}$ будут max. и min.

606. Min. $y=a\,5^{\frac{5}{3}}$ при $x=a\,5^{\frac{4}{3}}$.

607. Ломаная, состоящая из биссекторов 1-го и 2-го координатных углов.

608. Max. y при $x=\frac{3}{5}$, min. y при $x=1$.

609. Max. y при $x=1$; min. y при $x=\frac{5}{3}$.

610. Max. y при $x=1$; min. y при $x=-1$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=0$.

611. Min. y при $x=0$; разрыв непрерывности при $x=-2$.

612. Функция постоянно убывает; разрыв непрерывности при $x=-4$.

613. Min. y при $x=0$; разрыв непрерывности при $x=1$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=1$.

614. Функция убывает при $0<x<1$; возрастает при $x<0$ и при $x>1$; разрыв непрерывности при $x=0$ и $x=1$.

615. Функция постоянно убывает; разрыв непрерывности при $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

616. Min. y при $x=0$; разрыв непрерывности при $x=1$.

617. Max. y при $x=0$; min. y при $x=2$; разрывы непрерывности при $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ и при $x=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=1$; $lim\,(y')_{x=\pm\infty}=0$.

618. Min. y при $x=\frac{1}{2}$; разрывы непрерывности при $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ и при $x=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=-1$; $lim\,(y')_{x=\pm\infty}=0$.

619. Max. y при $x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)=1{,}62$; min. y при $x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)=-0{,}62$; разрывы непрерывности при $x=1$ и $x=3$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=1$; $lim\,(y')_{x=\pm\infty}=0$.

620. Функция убывающая; область изменения x от $-\infty$ до $+1$; при $x=1$ производная не существует.

621. Функция убывает в промежутке $(-\infty, 0)$ и возрастает в промежутке $(0, +\infty)$.

622. Функция возрастает от -1 до $+1$, не имея ни max. ни min.

623. Max. y при $x=-\frac{3}{2}$ и $x=3$; min. y при $x=1$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=0$.

624. Max. y при $x=0$; min. y при $x=+1$ и $x=-1$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=1$.

625. Min. y при $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $lim\,(y)_{x=\pm\infty}=0$; при $x=-1$ производная не существует.

626. Функция постоянно возрастает; $\lim\limits_{x=+\infty} y=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x=-\infty} y=-\infty$.

627. Max. y при $x=\pm 1$; min. y при $x=0$; $\lim\limits_{x=+\infty} y=0$.

628. Max. y при $x=\frac{26}{27}$; min. y при $x=1$.

629. Функция постоянно возрастает при $x\geqslant 2$.

630. Max. y при $x=\frac{20}{11}$; производная не существует при $x=2$.

631. Max. y при $x=0$; min. y при $x=\pm 1$.

632. Max. y при $x=+1$; min. y при $x=-1$; $\lim\limits_{x=\pm\infty} y=0$.

633. Max. y при $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; min. y при $x=0$; $\lim\limits_{x=\pm\infty} y=0$; при $x=+1$ производная не существует.

634. Min. y при $x=0$; $\lim\limits_{x=\pm\infty} y=0$.

635. Область изменения x: $x^2 \geqq 1$, max. y при $x=\pm 1$, $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 0$.

636. Область изменения x: $0 < x \leqq 1$. Функция $y=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ постоянно убывает. Разрыв непрерывности при $x=0$.

637. Область изменения x: $x > -1$. Функция $y=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ постоянно возрастает. Разрыв непрерывности при $x=-1$.

638. Функция постоянно возрастает; разрыв непрерывности при $x=-1$.

639. Функция постоянно возрастает; при $x=0$ — разрыв непрерывности.

640. Период функции π; max. y при $x=\frac{7\pi}{8}$; min. y при $x=\frac{3\pi}{8}$.

641. Функция имеет период 2π; max. y при $x=0$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, 2π; min. y при $x=\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

642. Функция имеет период $\frac{\pi}{2}$; max. y при $x=0$, $\frac{\pi}{2}$; min. y при $x=\frac{\pi}{4}$

643. Период функции 2π; min. y при $x=\frac{\pi}{10}$, $\frac{9\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{2}$; max. y при $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{13}{10}\pi$ и $\frac{17}{10}\pi$.

644. Период функции 2π; max. y при $x=0$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π; min. y при $x=\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

645. Период функции 2π; max. y при $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$; min. y при $x=\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

646. Период 2π; max. y при $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; min. y при $x=0$, π, 2π.

647. Период 2π; max. y при $x=0$, $x=2\pi$; min. y при $x=\pi$. Разрыв непрерывности при $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

648. Период функции π; max. y при $x=\frac{\pi}{2}$; min. y при $x=0, \pi$. Разрыв непрерывности при $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

649. Период функции 2π; max. y при $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; min. y при $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$. Разрыв непрерывности при $x=0$, π, 2π.

650. Функция возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ при изменении x от $-\infty$ до 0 и убывает от $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$ при изменении x от 0 до $+\infty$. Точка $x=0$, $y=+\frac{\pi}{2}$ угловая.

651. Max. y при $x = -\sqrt{3}$; min. y при $x = +\sqrt{3}$; $\lim\limits_{x=-\infty} y = -\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x=+\infty} y = +\frac{\pi}{2}$.

652. Min. y при $x = -\frac{1}{2}$.

653. Точки перегиба при $x = k\pi$
» разрыва » $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, k — целое число.

654. При изменении x от 0 до $+\infty$ функция сначала возрастает от ∞ до $\frac{1}{ae}$, затем убывает и приближается к пределу 0.

655. Область изменения x: $x > 2$ или $x < 1$. В области $x < 1$ функция убывает; в области $x > 2$ возрастает.

656. Функция определена при $1 < x < 2$ и при $x > 3$. В промежутке $1 < x < 2$ она убывает, а при $x > 3$ — возрастает.

657. Функция возрастающая, не существует в промежутке $-2 < x < 1$; разрывы непрерывности при $x = 1$ и $x = -2$; $\lim\limits_{x=+\infty} y = 0$.

658. Min. y при $x = 0$; функция существует при $x \geqslant -1$; $\lim\limits_{x=-1} y = +\infty$; $\lim\limits_{x=+\infty} y = +\infty$.

659. Min. y при $x = +1$; функция существует при $x \geqslant 0$; $\lim\limits_{x=0} y = +\infty$; $\lim\limits_{x=+\infty} y = +\infty$.

660. При увеличении x от 0 до π функция убывает от $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{\pi^2}$.

661. 2.

662. При всех a два вещественных корня.

663. При всех a два вещественных корня.

664. Один вещественный корень при $a < 1$; три — при $a \geqslant 1$.

665. 1.

666. При $a > \frac{1}{e}$ нет вещественных корней; при $0 < a < \frac{1}{e}$ два корня; при $a < 0$ один корень.

667. При $a > 0$ один корень; при $0 > a > -\frac{1}{e}$ два корня; при $a < \frac{1}{e}$ нет корней.

668. Два вещественных корня: один положительный, другой отрицательный.

669. $k < 11$.

670. $k > 175$; $k < -6\frac{26}{27}$.

671. $k > 0$; $k < -4$.

672. $0 < k < 38\frac{13}{16}$.

673. $k = 72$; $k = -\frac{800}{27}$.

674. $k < 0$.

675. $k \geqq -72 - 9\log 9$.

676. $k = -1$.

677. $k = \pm\left(\frac{3}{2}\pi - 1\right)$.

678. $k = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$; $k = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}$.

679. $2 < x < 3$.

680. $a = 2m$, $b = -9m$, $c = 12m$, $d = 23m$; m — произвольное положительное число.

682. Основание системы логарифмов должно быть $\leqq e^{\frac{1}{e}}$.

683. Высота цилиндра равна $\frac{k}{6}$. **684.** Высота конуса равна $\frac{2}{3}R$.

685. Высота цилиндра равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

686. Высота конуса равна $R\sqrt{3}$.

687. Сторона вырезанного квадрата $x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

688. Высота искомого треугольника будет в два раза меньше высоты данного треугольника ABC.

689. Стороны прямоугольника $\frac{2a}{3}$, $\frac{2\sqrt{2pa}}{\sqrt{3}}$.

690. Обозначив угол между радиусами OA и OM через α, получим $\operatorname{tg}\alpha=2$.

691. Боковая сторона равна $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$.

692. Радиус основания конуса равен полуторному радиусу основания цилиндра.

693. Если H—высота конуса, а R—радиус его основания, то наибольший объем цилиндра равен $\frac{4}{27}\pi R^2H$.

694. Если H—высота конуса, а R—радиус его основания, то наибольшая боковая поверхность цилиндра равна $\frac{1}{2}\pi RH$.

695. Если H — высота конуса, а R—радиус его основания, то радиус цилиндра равен $\frac{RH}{2(H-R)}$; $H>2R$.

696. Высота цилиндра равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

697. Высота цилиндра равна $R\sqrt{2}$.

698. Высота цилиндра равна $R\sqrt{2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$.

699. Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$. **700.** Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$.

701. Высота конуса равна $\frac{R}{16}(22-\sqrt{17})$.

702. Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

703. Радиус основания цилиндра: $R=\sqrt{\frac{(2+3\sqrt{2})S}{14\pi}}$.

704. Высота цилиндрической части тела равна $\frac{\sqrt{13}-1}{3}R$.

705. Если a и b—длины осей эллипса, то стороны прямоугольника равны:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

706. Если ACB—путь точки, то $\frac{C\alpha}{CA}=\frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{C\beta}{CB}$.

707. Если ACB—путь точки, то $\frac{\alpha C}{AC} = \frac{v_1}{v_2}$, если $\frac{\alpha B}{AB} \geqq \frac{v_1}{v_2}$,

$\alpha C = \alpha B$, если $\frac{\alpha B}{AB} < \frac{v_1}{v_2}$.

708. Если a—хорда сегмента и R—радиус круга, то при условии $a \leqq \frac{4R}{\sqrt{5}}$ прямоугольника наибольшего периметра нет. Если же $a > \frac{4R}{\sqrt{5}}$, то сторона искомого прямоугольника, параллельная хорде сегмента, равна $\frac{4R}{\sqrt{5}}$.

709. Если центральный угол сектора—α, то задача имеет решение лишь при условии: $tg\frac{\alpha}{2} > 1$. Центральный угол x между радиусами, проведенными через вершины прямоугольника, лежащие на дуге сектора, определяется уравнением $tg\frac{x}{2} = 2 \quad cotg\frac{\alpha}{2}$.

710. Высота призмы равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

711. Если обозначить через a и b расстояния точки A до прямых ON и OM и через φ угол, составляемый искомой прямой с прямой OM, то $tg\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

712. Равнобедренный.

713. Если координаты точки A относительно осей OM и ON равны соответственно a и b, то отрезок $OM = a + \sqrt{ab}$.

714. Отрезок искомой прямой между сторонами угла делится в точке A пополам.

715. Если через t обозначить промежуток времени от начала движения до искомого момента, то $t = \frac{vl + v'l' - (vl' + v'l)\cos\alpha}{v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\alpha}$.

716. Если вместимость цилиндра—v и внутренний радиус основания—R, то $R = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

717. Если внутренний радиус цилиндра —R и вместимость всего сосуда—v, то $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{2\pi}}$.

718. Котел должен иметь форму шара с внутренним радиусом $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$.

719. Высота конуса равна $4R$, где R—радиус шара.

720. Задача не имеет решения, если $l \geqq 4R$. Если же $l < 4R$ и φ—угол, образуемый стержнем с горизонтом, то $\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128R^2}}{16R}$.

721. Угол x, составляемый стержнем с горизонтом, определяется из равенства $tg\,x = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$.

722. $x = \frac{1}{2} R$, где R—радиус основания конуса.

723. Линия, соединяющая P с центром круга, делит пополам угол между искомыми хордами.

724. Плоскость должна рассекать ребра пирамиды пополам.

725. $\frac{k^3(3 - 2\sqrt{2})}{8}$.

726. Прямоугольник должен быть квадратом.

727. Касательную надо провести перпендикулярно к бисектрисе данного угла.

728. Отношение расстояний искомой точки до центров 1-ой и 2-ой сферы равно $\left(\frac{R}{R'}\right)^{3/2}$.

729. Если угол между хордой AB и радиусом, проведенным в точку A, обозначить через α, то углы, составляемые с AB искомыми хордами, определяются уравнением: $tg\, 2x = \frac{2 \sin 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}$.

730. Если R —радиус сферы и d—расстояние ее центра до плоскости, то высота h конуса равна: $h = 2d \pm \sqrt{d^2 + 3R^2}$.

731. Искомый эллипс должен касатьсл круга основания конуса. Если φ—угол при вершине конуса и x—угол наклонения плоскости искомого эллипса к основанию конуса, то $\sin 2x = 2 \sin \varphi$.

732. *Max.* z при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$.

733. *Max.* z при $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 2$; *min.* z при $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2 + \sqrt{3}$.

734. *Min.* $z = \frac{1}{3}(ab - a^2 - b^2)$ при $x = \frac{2a - b}{3}$, $y = \frac{2b - a}{3}$.

735. *Min.* z при $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

736. *Min.* при $x = y = a$, если $a > 0$, *max.* при $x = y = a$, если $a < 0$.

737. *Min.* $z = 0$ при $x = y = 3$; *max.* $z = -a^3 + 27$, если $a \leqq 9$ и $2a^3 - 9a^2 + 27$, если $a > 9$.

738. *Max.* достигается при $x = a$, $y = a$ и равен $2a^4$, *min.* достигается при $x = 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 1$ и равен -1.

739. *Max.* z достигается: 1) при $x = \pm 1$, $y = 0$, когда $a > b$; 2) при $x = 0$, $y = \pm 1$, когда $a < b$; 3) при $x^2 + y^2 = 1$, когда $a = b$. Наименьшее значение достигается при $x = y = 0$.

740. *Max.* z при $x = y = \frac{2a}{3}$.

741. *Min.* z при $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$; при $x = y = 0$ нет ни *max.* ни *min.*

742. *Min.* z при $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

743. *Max.* z при $x = a$, $y = b$.

744. *Max.* z при $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$.

745. Нет ни *max.* ни *min.*

746. *Max.* z при $x = y = \frac{\pi}{3}$.

747. *Max.* z при $x=y=\frac{\pi}{6}$; *min.* z при $x=y=\frac{3\pi}{2}$.

748. *Min.* $z=-\frac{1}{8}$ при $x=y=\frac{\pi}{3}$ и $x=y=\frac{2\pi}{3}$; *max.* $z=1$.

749. Гребни в плоскостях: $x-y=2k\pi$ при $ab>0$ соотв. *max.*
» » » $x-y=(2k+1)\pi$ при $ab<0$ соотв. *min.*

750. *Max.* z при $x=\alpha$, $y=\beta$.

751. *Min.* f при $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=1$.

752. *Min.* $f=3$ при $x=y=z$.

753. *Min.* $f=3$.

754. *Min.* $z=1$ при $x=-2$, $y=0$; *max.* $z=-\frac{8}{7}$ при $x=\frac{16}{7}$, $y=0$.

755. *Min.* $z=\frac{4+\sqrt{6}}{6}$ при $x=-\frac{1+\sqrt{6}}{3}$, $y=\frac{2}{3}$;
max. $z=\frac{4-\sqrt{6}}{6}$ при $x=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

756. *Max.* $z=\frac{4+\sqrt{6}}{6}$ при $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$; *min.* $z=\frac{4-\sqrt{6}}{6}$ при $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

757. *Max.* $z=4$ при $x=y=1$; *min.* $z=-4$ при $x=y=-1$.

758. *Max.* $z=-2$ при $x=-1$, $y=2$; *min.* $z=1$ при $x=-1$, $y=2$.

759. Не имеет.

760. *Max.* $z=-2a\sqrt{2}$ при $x=y=-a\sqrt{2}$; *min.* $z=2a\sqrt{2}$ при $x=y=a\sqrt{2}$.

761. *Min.* $z=2a^m$ при $x=y=a$.

762. *Min.* $z=\frac{2}{a}$ при $x=y=a$.

763. *Max.* $z=\frac{1}{2}$ при $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; *min.* $z=-\frac{1}{2}$ при $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

764. *Max.* z при $x=a\sqrt{2}$, $y=-b\sqrt{2}$ и при $x=-a\sqrt{2}$, $y=b\sqrt{2}$; *min.* z при $x=a\sqrt{2}$, $y=b\sqrt{2}$ и при $x=-a\sqrt{2}$, $y=-b\sqrt{2}$.

765. *Max.* z при $x=y=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и при $x=-y=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

766. *Min.* f при $\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{y}{\sqrt{b}}=\frac{z}{\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

767. *Max.* $f=\left(\frac{a}{9}\right)^9$.

768. Искомое наименьшее значение

$$f=\frac{1}{p}\left(\sqrt{\alpha_1\beta_1}+\sqrt{\alpha_2\beta_2}+\ldots+\sqrt{\alpha_n\beta_n}\right)^2.$$

769. Наименьшее значение $=\frac{12-\sqrt{18}}{7}$, наибольшее $=\frac{12+\sqrt{18}}{7}$.

770. Искомые наибольшее и наименьшее значения служат корнями уравнения: $\frac{l^2}{u-a^2}+\frac{m^2}{u-b^2}+\frac{n^2}{u-c^2}=0$.

771. Наибольшее значение $=4^4/_{27}$, наименьшее $=4$.

772. Наибольшее значение функции достигается при $x=\frac{\pi}{3}$; $y=\frac{\pi}{6}$.

773. Наибольшее значение $=\frac{1}{8}$; наименьшее $=0$.

775. Длина искомой прямой $l=\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{2ab}$, где a и b стороны треугольника, а θ угол между ними.

776. $x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$, где x_i, y_i — координаты вершин.

777. Обозначая через x и y противолежащие углы четыреугольника, найдем, что $x+y=\pi$, то-есть искомый четыреугольник может быть вписан в круг.

778. Ели a, b, c — стороны треугольника и S — его площадь, то расстояния искомой точки x, y, z до сторон a, b, c будут:

$$x=\frac{2Sa}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2Sb}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2Sc}{a^2+b^2+c^2}.$$

779. Наибольшее значение площади $=\frac{p^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$.

780. $ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$, где a, b и c — координаты данной точки.

781. $V_{max}=a^3$.

782. Куб с ребром $\sqrt{\frac{S}{6}}$, где S—полная поверхность паралеллепипеда.

783. Искомый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3$.

784. Искомая плоскость. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

785. Если x, y, z — наружные размеры ящика, то $x=y=z=\sqrt[3]{v}+2a$.

786. $x=y=2a+\sqrt[3]{v}$, $z=\frac{x}{2}$.

787. $x=y=z=a+\sqrt{\frac{v-2a^3}{6a}}$.

788. Полуоси эллипсоида (шара) $x=y=z=a+\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$.

789. Стороны искомого треугольника равны $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ и $\frac{1}{2}p$, где $2p$ — данный периметр.

790. Двугранные углы при основании должны быть одинаковы.

791. Радиус круга основания искомого цилиндра вдвое менее высоты.

792. $V_{max}=\frac{8}{27}R^2H$, где R радиус основания, H — высота конуса.

793. Радиус основания $r=l\sqrt{\frac{2}{3}}$, где l — длина образующей.

794. Радиус основания конуса $R=\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.

795. Радиусы оснований конуса:

$$R=(1+\cos\alpha)\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sin\alpha(3+\cos^2\alpha)}};\quad r=(1-\cos\alpha)\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sin\alpha(3+\cos^2\alpha)}}.$$

796. $x=y=z=\frac{\pi}{3}$.

797. Искомый треугольник правильный.

798. Искомый многоугольник правильный.

799. Искомый многоугольник правильный, с площадью $\frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{2\pi}{n}$.

800. Нормаль к эллипсу в искомой точке перпендикулярна к линии, соединяющей данные точки.

801. Искомое расстояние равно $p\sqrt{5}$.

802. Высота сегмента параболы равна $\frac{3}{4}$ высоты треугольника.

803. Наибольшая площадь $S=\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

804. Искомая точка имеет абсциссу $x=\frac{a^2m}{a^2-b^2}$ при условии $|m|<\frac{a^2-b^2}{a}$. Если же $|m|\geqq\frac{a^2-b^2}{a}$, то для искомой точки $x=\pm a\begin{cases}+, & \text{если } m>o\\ -, & \text{если } m<o.\end{cases}$

805. Искомая площадь $S=3\sqrt{3}\,ab$.

806. Касательная должна быть проведена в точках с координатами:

$$x=\pm\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a+b}};\quad y=\pm\frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a+b}}.$$

807. $\sqrt{6+\sqrt{12}}$; $\sqrt{6-\sqrt{12}}$.

808. $S=\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$.

809. Плоскость $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$, касательная к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, образует тетраэдр с наименьшим объемом $V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

ОТДЕЛ III.

1. Астроида: $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}$.

2. Если длина переменной прямой l, то при надлежащем выборе осей уравнение кривой будет: $(x^2+y^2)^3=l^2x^2y^2$.

3. Уравнение кривой: $y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$.

4. Если обозначить через l длину отрезков $DM=DN$, через a радиус круга и за полярную ось взять диаметр, проходящий через A, то уравнение кривой будет: $(r-2a\cos\theta)^2=l^2$.

5. Взяв начало координат в центре круга и OA за ось абсцисс, получим уравнение кривой: $R^2(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x-a)^2(x^2+y^2)$.

6. Если взять за оси координат данный диаметр и диаметр, к нему перпендикулярный, то уравнение искомой кривой будет:
$(x^2+y^2)(x^2+2y^2-2xy)=4R^2y^2$.

7. При надлежащей координатной системе уравнение кривой будет: $(x^2+y^2)y^2-R^2x^2=0$.

8. Лемниската.

9. Поместив AB $A'B'$, выберем начало прямоугольной системы координат в точке, делящей AB пополам, ось x-ов направим AB; если h и k будут координаты точки A, $a=AB=A'B'$, то уравнение искомого геометрического места будет: $(x^2+y^2-2ah)(x^2+y^2)=4(hy-kx)(a^2-x^2-y^2)$. (Механизм, построенный на основании этой задачи, называется параллелограммом Уатта.)

10. Точка D будет описывать окружности.

11. Круг, имеющий центром O' и проходящий через O. (Механизм, построенный на основании этой задачи, называется прямилом Посселье.)

12. $t_1t_2t_3=-1$.

13. $t_1t_2t_3(t_1+t_2+t_3)+(t_1+t_2+t_3)^2-t_1t_2-t_1t_3-t_2t_3+3=0$.

14. $y=x$.

15. $17x+9y-25=0$.

16. $y-x+1=0$.

17. $\mu=\frac{\pi}{2}+n\theta$.

18. $(3t^2-1)x+t(t^2-3)y+4a=0$.

19. $x=y+4$.

20. Для точки эллипса, лежащей в первом координатном угле, уравнение касательной: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\sqrt{2}$.

25. $3x-5y-9=0$.

26. Уравнение одной из нормалей: $50x-3y=\frac{1497}{10}a$.

27. $x = 2\pi a$.

28. $4x + 2(e - e^{-1})y = a(e^2 + e^{-2} + 4)$.

29. Искомые точки получаются при $\theta = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$; $k = 0, \pm 1$.

30. $x + y = \frac{3}{2}p$.

31. Для точки, лежащей в первом координатном угле, уравнение нормали: $ax - by = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}}$.

32. $\sqrt{a}\,x - \sqrt{b}\,y = (a - b)\sqrt{a + b}$.

40. $T = \frac{2r^3}{a^2}$; $N = \frac{a^2}{2r}$.

41. Координаты центра одного из искомых кругов:

$$\alpha = \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{\sqrt{41}}\right)a,\ \ \beta = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{\sqrt{41}}\right)a.$$

42. Координаты центра одного из кругов.

$$\alpha = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)a,\ \ \beta = \left(1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)a.$$

43. Уравнение искомого круга:

$$x^2 + y^2 + \frac{R}{4\sqrt{2}}(4 - \pi)x - \frac{R}{4\sqrt{2}}(4 + \pi)y = 0.$$

46. Если уравнения кругов суть: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ и $x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$, то искомое соотношение: $2aa' + 2bb' = c + c'$.

47. Искомые углы определяются из уравнений: $tg\,\mu = 2k\pi$ или $tg\,\mu = (2k + 1)\pi$, где k — произвольное целое число.

48. Улитка Паскаля.

49. Уравнение кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. Шесть вершин с касательными $\parallel OX$ при $a^2 > 2b^2$, и только две при $a^2 \leqq 2b^2$. Две вершины с касательными $\parallel OY$.

50. Лемниската.

51. Циссоида.

54. Окружность.

55. Окружность.

56. Удлиненная циклоида.

57. Циссоида.

58. Если начало прямоугольных координат возьмем в центре неподвижного круга, то уравнение искомого геометрического места будет.

$\frac{x}{R_1} = \frac{n \pm 1}{n} \cos nt - \cos(n \pm 1)t$, $\frac{y}{R_2} = \frac{n \pm 1}{n} \sin nt - \sin(n \pm 1)t$, где R_1, R_2 — радиусы подвижного и неподвижного круга, $n = \frac{R_1}{R_2 \mp R_1}$, + для случая катания круга внутри, — для случая катания вне неподвижного круга.

61. $R = \sqrt{\frac{(2a + 3x)^3 x}{3a^2}}$.

62. $\frac{\sqrt{13}}{6}$.

63. $R = \frac{y^2}{a}$.

64. $x_c = 2$, $y_c = 2$.

65. $x_c = -\frac{a(2a^2 - x^2)}{(2a + x)(a - x)^2}$, $\quad y_c = \frac{2a}{2a + x}\frac{(a + x)^{3/2}}{(a - x)^{1/2}}$.

66. $R = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}}$; $\quad x_c = x - a\,tg\frac{x}{a}$,

$$y_c = a \lg\cos\frac{x}{a} - a = y - a.$$

67. $R = \frac{1}{e}$; $x_c = \frac{1}{e}$, $y_c = 0$.

68. $R = \frac{(a^2 + b^2)^{3/2}}{2\sqrt{2}\,ab}$.

69. $R_{min} = a$ для точки M $(0, 0)$.
70. $R = \sqrt{ab}$.
71. $x = 0$, $y = 0$; $\frac{1}{R}$ (кривизна) $= \frac{2}{a}$.
72. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = -\frac{1}{2} \log 2$.
73. $R = \frac{a^2}{3r}$.
74. $R = r\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2}$.
75. $x_c = \frac{a}{3}(2\cos\theta - \cos 2\theta)$, $y_c = \frac{a}{3}(2\sin\theta + \sin 2\theta)$; $R = \frac{8}{3} a \sin\frac{\theta}{2}$.
76. $x_c = \frac{3a\cos^2\theta\,(1 + 8\sin^4\theta)}{4(1 + 2\sin^2\theta)}$, $y_c = -\frac{6a\sin^3\theta\cos^3\theta}{1 + 2\sin^2\theta}$.
83. Уравнение параболы

$$y = \sqrt{2R(a + R)}\left\{\frac{a + R}{x} - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x}{a + R}}\right\}.$$

86. $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = 2$. 87. $\left(\frac{3y}{8}\right)^4 + 6a^2\left(\frac{3y}{8}\right)^2 + 3a^3x = 0$.

88. $(x + y)^{2/3} - (x - y)^{2/3} = \sqrt[3]{16a}$.

89. $(qx + p)^{2/3} - qy^{2/3} = \frac{(1 + q)^{2/3}}{p^{4/3}}[(qx + p)^2 - qy^2]$, если кривая 2-го порядка задана уравнением $y^2 = 2px + qx^2$.

90. $x = a \log\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{2a} \mp \frac{y\sqrt{y^2 - 4a^2}}{4a}$.

91. $\left(x - a \arcsin\frac{y - \lambda}{4a}\right)^2 = \frac{y}{32a^2}[y(-y^2 + 20a^2) + (y^2 + 4a^2)]$, $\lambda = \pm\sqrt{y^2 + 16a^2}$.

92. $x = a\left[\arccos e^{\frac{y+a}{a}} - \frac{\left(1 - e^{2\frac{y+a}{a}}\right)^{1/2}}{e^{\frac{y+a}{a}}}\right]$.

93. Кардиоида.
94. $(x^{2/3} + y^{2/3})^2(x^{2/3} - y^{2/3}) = \frac{4a^2}{9}$.

95. Цепная линия $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$.

96. $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = -a(2\sin t - \sin 2t)$.

97. Гипербола $xy = m^2 \operatorname{cosec}\omega$, для которой стороны заданного угла служат асимптотами.

98. Парабола: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, где a заданная сумма отрезков.

99. Эллипс или парабола.

100. Парабола $y \sin\alpha = 2\sqrt{ax} - (x + a)\cos\alpha$, где a — расстояние заданной точки от заданной прямой и α данный угол; за ось ординат взята данная прямая, ось абсцисс проходит через данную точку.

101. Циклоида.
102. Циклоида.

103. Эллипс с осями $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{2}}$, где a, b — полуоси заданного эллипса.

104. Заданная парабола.
105. Кардиоида.

106. Эпициклоида; радиус катящегося круга равен половине радиуса неподвижного.

107. $x^2 = 4p(y + a)$. **108.** Другой фокус эллипса.

109. Циклоида.

110. Эллипс с полуосями R и $R\sqrt{2}$, если за ось абсцисс взят диаметр круга, параллельный заданному направлению; R — радиус круга.

111. $x^2 + y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 - R^2}{a} + a - x\right)^2$, где a — абсцисса центра круга, радиуса R.

112. Астроида: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **113.** Прямые: $x \pm y \pm c = 0$.

114. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2}$. **115.** Вогнута.

116. Выпуклость обращена к оси OX.

117. К оси OY кривая обращена вогнутостью.

118. Кривая выпукла.

119. Вершины с касат. $\parallel OX$: $(a, \pm a)$, $(-a, \pm a)$,
» » » $\parallel OY$: $[(1 + \sqrt{2})a, 0]$, $[(-1 + \sqrt{2})a, 0]$.

120. Вершины с касат. $\parallel OX$ при $x = \pm \frac{2}{k\pi}$,
» » » $\parallel OY$ » $y = 0$.

121. Точка перегиба $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. **122.** Точки с абсциссами ± 1.

123. $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$. **124.** $M\ (1, 0)$.

125. $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}\right)$.

126. $M\ (0, 1)$. **127.** $M\left(\frac{3}{2}, e^{-2}\right)$.

128. Точка перегиба при $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$.

129. Координаты точки перегиба определяются уравнением $2tg^3\theta + 3tg^2\theta + 3 = 0$ (один вещественный корень).

130. Начало координат — двойная точка.

131. Начало координат — точка возврата II рода.

132. $M\ (a, 0)$ — изолированная точка.

133. Начало координат — изолированная точка, если $a > 0$.

134. Начало координат — изолированная точка, если $ab > 0$.

135. Начало координат — тройная точка.

136. Начало координат — угловая точка.

137. Начало координат — угловая точка.

138. Начало координат — точка прекращения.

139. Начало координат — точка прекращения.

140. $M_1\ (0, 0)$ и $M_2\ (0, 1)$ — точки прекращения.

142. Асимптота $y + x = 0$; кривая расположена по обе стороны асимптоты, пересекая ее в начале координат.

143. Асимптота: $y = x + \frac{2}{3}$. **144.** Асимптоты: $y = \pm(x + a)$, $x = a$.

145. Асимптоты: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

146. Асимптота $y = x + \frac{4}{3}$; обе ветви с одной стороны асимптоты.

147. Асимптота $y = x + \frac{a}{3}$. **148.** Асимптоты $y = \pm\left(x - \frac{b}{2}\right)$.

149. Вершины $\begin{cases} \text{с касательными} \parallel OX: (\pm 2\sqrt{5},\ 4);\ (\pm\sqrt{5}, -1). \\ \text{» \quad »} \parallel OY: (\pm 5,\ 3). \end{cases}$

Через начало координат проходят две ветви кривой (узел).

150. Через начало проходят две ветви кривой. Вершины, где касательные $\parallel OY$: $(4, 0)$ и $(-1, 0)$.

151. 4 вершины с касательными $\parallel OX$; в точках $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(2, \pm\sqrt{2})$ касательные $\parallel OY$. В начале координат двойная точка.

152. Кардиоида. Вершины $\begin{cases} \text{с касательными:} \parallel OX: (3, \pm\sqrt{3}). \\ \text{» \quad »} \parallel OY: (0, 8); (-1, \pm\sqrt{3}). \end{cases}$

В начале координат возврат 1-го рода.

153. Две вершины с касательными $\parallel OX$.

» » » » $\parallel OY$.

Начало координат тройная точка.

154. Четыре точки возврата 1-го рода: $(\pm a,\ 0)$; $(0, \pm a)$.

Четыре вершины с касательными $\parallel OX$.

» » » » $\parallel OY$.

155. Вершины $\begin{cases} \text{с касательными} \parallel OX: \left(\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right), \\ \text{» \quad »} \parallel OY: (0,\ 0). \end{cases}$

Через особенную точку $(1, 0)$ проходят две ветви кривой (параболические).

156. Вершины $\begin{cases} \text{с касательными} \parallel OX: (-4a, \pm 16a), \\ \text{» \quad »} \parallel OY: (0,\ -5a). \end{cases}$

Через начало координат проходят две ветви кривой.

157. Одна вершина с касательными $\parallel OX$,

» » » » $\parallel OY$.

Через начало координат проходят три ветви кривой. Есть параболические ветви.

158. Две вершины с касательными $\parallel OX$,

» » » » $\parallel OY$.

Начало координат — тройная точка. Две параболические ветви.

159. В начале координат перегиб. Вершин нет. Асимптота: $y - x = 0$.

160. В начале координат перегиб.

Четыре вершины с касательными $\parallel OX$. Асимптота: $x_3 + y = 0$.

161. Одна вершина с касательными $\parallel OX$,

» » » » $\parallel OY$.

Асимптоты. $x + y = 0$; $x - y = 0$.

162. Две вершины с касательными $\parallel OX$,

» » » » $\parallel OY$.

Асимптоты: $x = 0$; $y = 0$; $x - y = 0$; $x + y = 0$.

163. Вершины $\begin{cases} \text{с касат.} \parallel OX: \left(\pm\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),\ \pm\frac{a}{2}\sqrt{14\sqrt{5} - 26}\right), \\ \text{» \quad »} \parallel OY: (\pm a,\ 0). \end{cases}$

В начале координат двойная точка (узел).

Асимптота: $x = a$. (Прямая строфоида.)

164. В начале координат двойная точка с различными касательными. Асимптоты: $x + y = 1$, $x + y = -1$.

165. Вершины $\begin{cases} \text{с касательными} \parallel OX: (0, \pm 2\sqrt{2}), \\ \text{» } \quad \text{» } \quad \parallel OY: (\pm 1, -2). \end{cases}$

Особенная точка $(0, -1)$ — узел, через который проходят 2 ветки. Асимптота: $y = 0$. (Конхоида Никомеда.)

166. Вершина с касательными $\parallel OY: (\pm 2, 0)$. Асимптоты: $x = \pm 1$; $x = \pm y$. Начало координат двойная точка (узел).

167. Вершин нет.

В начале координат возврат 2-го рода.

Асимптота $x = 2a$. (Циссоида Диоклеса.)

168. В начале координат возврат 1-го рода. Вершина с касательными $\parallel OX$: $(2, \sqrt[3]{4})$.

В точке $(3, 0)$ перегиб с касательными $\parallel OY$. Асимптота $x + y - 1 = 0$.

169. Начало координат изолированная точка. Вершин нет. Асимптоты: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

170. Вершин нет. В начале координат особенная точка, через которую проходят три ветки кривой. Асимптоты: $y + 1 = \pm x$ (Скифоида).

171. Вершина с касательными $\parallel OY$ при $t = 0$. Асимптота: $x = 1$.

172. Четыре вершины с касательными OX.

Асимптоты: $x + y + 2 = 0$; $x + y - 2 = 0$; $x = 0$.

173. Вершин нет. В начале координат тройная точка. Асимптота: $y = x + 1$. Две параболических ветви.

174. Начало координат двойная точка (узел). Асимптота: $y = 0$; 4 вершины с касательными $\parallel OX$.

175. $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$.

176. $x = y = \frac{z^2 + 2x_0^2}{4x_0}$.

177. $\frac{x - x_0}{\sqrt{a}} = \frac{y - y_0}{\sqrt{b}} = \frac{z - z_0}{\sqrt{2z_0}}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + b + 2z_0}}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a + b + 2z_0}}$; $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2z_0}}{\sqrt{a + b + 2z_0}}$.

178. Уравнения касательной $y\sqrt{p(p+q)} = px + \frac{p(p-q)}{2}$,

$z\sqrt{q(p+q)} = qx + \frac{q(p+q)}{2}$.

Искомая длина $\frac{p+q}{\sqrt{2}}$.

179. Если начало координат поместить в центре круга радиуса R, если плоскость круга содержит ось z-ов, то

$$\alpha = -\frac{zx}{R\sqrt{R^2 - z^2}}, \ \beta = -\frac{zy}{R\sqrt{R^2 - z^2}}, \ \gamma = \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R}.$$

180. $\frac{x - x_0}{\sin\frac{t_0}{2}} = \frac{y - y_0}{\cos\frac{t_0}{2}} = \frac{z - z_0}{\operatorname{cotg}\frac{t_0}{2}}$; $\cos\alpha = \sin^2\frac{t_0}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}\sin t_0$, $\cos\gamma = \cos\frac{t_0}{2}$.

183. Гиперболоид вращения. **184.** Циклоида.

185. $x+y=2z$. **186.** $x+y+\frac{p}{\sqrt{4a^2-p^2}}z=p$.

187. Уравнение касательной: $\frac{x_0(x-x_0)}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{y_0(y-y_0)}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{z_0(z-z_0)}{c^2(a^2-b^2)}$, уравнение нормальной плоскости: $a^2(b^2-c^2)\frac{x-x_0}{x_0}+b^2(c^2-a^2)\frac{y-y_0}{y_0}+c^2(a^2-b^2)\frac{z-z_0}{z_0}=0$.

188. Уравнение искомой плоскости: $x\,tg\,t_0=y\sin\alpha+z\cos\alpha$.

189. $6x-8y-z+3=0$. **190.** $ay+b-z_0=0$.

191. $bx_0x-ay_0y=0$.

192. $b^2x_0^3x-a^2y_0^3y+(a^2-b^2)z_0^3z=a^2b^2(a^2-b^2)$.

193. $xy_0-yx_0-z\sqrt{2}+z_0\sqrt{2}=0$.

194. Уравнения главной нормали: $\frac{x-x_0}{\sqrt{a}}=\frac{y-y_0}{\sqrt{b}}=\frac{z-z_0}{-\frac{a+b}{2\sqrt{az_0}}}$. Уравнения бинормали: $\frac{x-x_0}{-\sqrt{b}}=\frac{y-y_0}{\sqrt{a}}=\frac{z-z_0}{0}$.

195. Главная нормаль: $\frac{x-1}{-31}=\frac{y-1}{-26}=\frac{z-1}{22}$. Бинормаль: $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{-1}$.

196. Уравнения главной нормали: $\frac{x-x_0}{t_0^3-2t_0}=\frac{y-y_0}{1-t_0^4}=\frac{z-z_0}{2t_0^3-t_0}$. Уравнения бинормали: $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{2t_0}=\frac{z-z_0}{t_0^2}$.

198. $2\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}=\sin 2x$. **199.** Винтовая линия.

200. Радиус 1-й кривизны $R=\sqrt{6}$.

201. $R=\frac{(a+b+2z)^{3/2}}{(a+b)^{1/2}}$.

202. Радиус 2-й кривизны $T=+\frac{64y^2+36y+1}{12y}$.

203. $R=T=\frac{(x+a)^2}{a}$. **204.** $R=\frac{4}{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}$.

205. Геометрическое место центров кривизны простой винтовой линии представляет тоже винтовую линию, которая будет расположена на том же цилиндре, если шаг винта равен длине окружности основания цилиндра.

206. $x+y+3z=9$. **207.** $xx_0^{m-1}+yy_0^{m-1}+zz_0^{m-1}=a^m$.

203. $x_0(2m_0^2-a^2)x+y_0(2m_0^2+a^2)y+z_0(2m_0^2-a^2)z=m_0^4$, где $m_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2$.

209. $x-y+2z=\sqrt{\frac{2}{11}}$ и $x-y+2z=-\sqrt{\frac{2}{11}}$.

210. $x-y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

211. Две прямые: $\begin{cases}\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=1;\ \frac{y_0x-x_0y}{ab}=+\frac{z-z_0}{c},\\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=1;\ \frac{y_0x-x_0y}{ab}=-\frac{z-z_0}{c}.\end{cases}$

212. Прямые: $\begin{cases}\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=z+z_0;\ \frac{x_0-x}{a}=\frac{y_0-y}{b},\\ \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=z+z_0;\ \frac{x_0-x}{a}=-\frac{y_0-y}{b}.\end{cases}$

213. Прямые: $\begin{cases} X = x_0;\ x_0 Y = aZ, \\ Y = y_0;\ y_0 X = aZ. \end{cases}$

214. Уравнение касательной плоскости: $x \sin v_0 - y \cos v_0 + \frac{u_0}{k} z = u_0 v_0$.

Уравнения нормали. $\frac{x - u_0 \cos v_0}{\sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{\cos v_0} = \frac{k(z - kv_0)}{u_0}$.

215. $6u_0v_0(x - x_0) + 3(u_0 + v_0)(y - y_0) + 2(z - z_0) = 0$.

216. Объем $V = \frac{9}{2} a^3$

219. $x^2 + y^2 + z^2 = 3a\sqrt{xyz}$.

220. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$.

221. $(x - az)^2 + (y - bz)^2 = 2R(y - bz)$.

222. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + (lx + my + nz)^2$.

223. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = \frac{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^2}{14} + 1$.

224. Циклоида.

225. $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2$.

226. $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx)^2$.

227. $4xy + (z - 3c)^2 = 0$.

228. $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4(x^2 + z^2)a^2$.

229. $y^4 = 4p^2(x^2 + z^2)$.

230. Около $OX: (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2)$.

» $OY: (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$.

231. $xyz = \frac{2}{g^r}$.

232. Коническая поверхность.

233. Взяв за оси координат ребра трехгранного угла, получим уравнение вида: $xyz = m^3$, где m — постоянное, зависящее от данного объема и от элементов данного угла.

234. $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = \frac{(lx + my + nz)^2}{l^2 + m^2 + n^2}$.

235. $(r \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = R^2 - z^2$.

ОТДЕЛ IV.

---

1. -36.

2. 7.

3. 4.

4. -15.

5. 8100.

6. ab.

7. $1 + a^2 + b^2 + c^2$.

8. $abcd \left(7 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$.

9. $-2(x^3 + y^3)$.

10. $(x - y)(y - z)(z - x)$.

11. $2abc(a + b + c)^3$.

12. $abcd + cd + ab + ad + 1$.

13. $\Pi(x_i - x_j)$, где i проходит значения: $n, n-1, n-2 \ldots 3, 2$; j значения: $i-1, i-2, \ldots 1$.

14. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\, \Pi(x_i - x_j)$; $i = n, n-1, n-2, \ldots 3, 2$.
$j = i-1, i-2, \ldots 1$.

15. $(x_1 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)\, \Pi(x_i - x_j)$;
$i = n, n-1, \ldots 3, 2$.
$j = i-1, i-2, \ldots 1$.

16. $$f(x) = \sum_{p=0}^{p=m} b_p \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{p-1})(x - x_{p+1})\ldots(x - x_m)}{(x_p - x_0)(x_p - x_1)\ldots(x_p - x_{p-1})(x_p - x_{p+1})\ldots(x_p - x_m)}.$$

17. $-2\sin(a - b)\sin(b - c)\sin(c - a)$.

18. $4\sin\frac{1}{2}(a - b)\sin\frac{1}{2}(b - c)\sin\frac{1}{2}(c - a)\,.\,[\sin(a + b) + \sin(b + c) + \sin(c + a)]$.

19. $4\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$.

20. $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha - \gamma)\sin(\alpha - \delta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\beta - \delta)\sin(\gamma - \delta)$.

28. Если $|c|$ не $= 1$, то круг с центром в a.
Если $|c| = 1$, то прямая.

29. Эллипс, оси которого: $|a| + |b|$ и $|a| - |b|$.

30. Гипербола.

31. $-i, -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

32. $i, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} i + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} i + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

33. Корни: $\operatorname{cotg}\frac{2k + 1}{2n}\pi$; $k = 0, 1, 2 \ldots n - 1$.

34. Если положить $a = \operatorname{tg}\varphi$, то $x_k = \operatorname{tg}\frac{\varphi + k\pi}{n}$; $k = 0, 1, 2 \ldots n - 1$.

35. $\cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$.

36. $5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$.

37. $8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1 = 1 - 8\sin^2\varphi + 8\sin^4\varphi$.

38. $\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{4}{8}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}$. 39. $\frac{1}{16}\cos 5\varphi + \frac{5}{16}\cos 3\varphi + \frac{10}{16}\cos\varphi$.

40. $1 + (2k+1)\pi i$. 41. $(4k+1)\frac{\pi}{2} i$.

42. $\log\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i$. 43. $\log\sqrt{1+x^2} + (\operatorname{arctg} x + 2k\pi) i$.

44. $e^{-2k\pi}\{\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)\}$. 45. $e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}}$

46. $e^{(12k+1)\frac{\pi}{6}}$. 48. $e^{(8k+1)\frac{\pi}{4}}$.

48. $e^{(16k+1)\frac{\pi}{8}}$. 49. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}\, i$.

50. $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$.
$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y$.

51. $x = i\log(a + \sqrt{1+a^2}) + 2k\pi$.
$x = -i\log(a + \sqrt{1+a^2}) + (2k+1)\pi$.

52. Аргумент увеличивается на 4π.

53. Аргумент увеличивается на π.

54. Аргумент увеличивается на π или 2π, смотря по тому, заключает ли замкнутая кривая только одну из точек $x=0$, $x=1$ или обе.

55. u обращается в $e^{2\pi i(\alpha+\beta)} u$.

56. u обращается в $e^{2\pi i\alpha}(z-a)^\alpha[\log(z-a) + 2\pi i]$.

57. u обращается в $e^{2\pi i\alpha}(z-a)^\alpha[\log(z-a) + 2\pi i]^2$.

58. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$.

59. $\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}$

60. $x^2 + x + 1 + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

61. $\frac{1}{x^3} + \frac{x-1}{(x^2+2)^2} - \frac{x}{x^2+2}$.

62 $(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 15(x-1) + 19 + \frac{12}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$.

63. $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}$. 64. $x - 1 + \frac{x}{x^3+x+1} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$.

65. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x^2}$. 66. $x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$.

67. $-\frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$.

68. $1 + \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$.

69. $\frac{1}{x} - \frac{10}{(2x+5)^2} - \frac{2}{2x+5}$. 70. $-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{21x-1}{(3x^2+1)^2}$.

71. $\frac{1}{8}\left\{\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}\right\}$.

72. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x^2-2x\cos\alpha+1} + \frac{1}{x^2+2x\cos\alpha+1}\right\}$.

73. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x+2\cos\frac{\pi}{9}}+\frac{1}{x+2\cos\frac{7\pi}{9}}+\frac{1}{x+2\cos\frac{13\pi}{9}}\right\}$.

74. $1-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right\}$.

75. $x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right\}$.

76. $1-\frac{8}{7(x-2)}+\frac{27}{8(x-3)}-\frac{125}{56(x-5)}$.

77. $1-\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x-1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right\}$.

78. Коэффициент при $\frac{1}{(x-a_i)^2}$ равняется a_i^2, коэффициент при $\frac{1}{x-a_i}$ равняется $2a_i\left(\frac{a_1}{a_i-a_1}+\frac{a_2}{a_i-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_i-a_n}\right)$.

80. $x_1=0{,}834$; $x_2=2{,}217$; $x_3=5{,}949$.

81. $x_1=-3{,}9489$; $x_2=-0{,}2172$; $x_3=1{,}166$.

82. $x_1=-4{,}145$; $x_2=-2{,}524$; $x_3=0{,}669$.

83. $x_1=-1{,}7912$; $x_2=2$; $x_3=2{,}7912$.

84. $x_1=-1{,}732$; $x_2=1{,}732$; $x_3=3$.

85. $x_1=-2{,}33$; $x_3=2{,}12$; $x_2=0{,}20$. (Значения даны по недостатку.)

86. Однократное применение способа Ньютона к корню x_2 предыдущей задачи дает: $0{,}201639<x_2<0{,}201641$.

87. $x=0{,}6527$.

88. $x_1=-1$, $x_2=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $x_{3,4}=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}$.

89. Три вещественных корня $\infty>\lambda_1>-a^2>\lambda_2>-b^2>\lambda_3>-c^2$.

90. $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{3}{2}$.

91. $x_1=-\frac{3}{2}$; $x_2=\frac{2}{3}$.

92. $x_1=-\frac{2}{3}$; $x_2=2$

93. $x_1=-2$ (двукратный корень); $x_2=1$ (двукратный корень).

94. $x_1=-2$; $x_2=5$; $x_3=3$.

95. $x_1=x_2=\frac{1}{2}$; $x_3=1$; $x_4=-2$.

96. $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=x_3=3$, $x_4=\frac{1}{2}$.

97. $x_1=2$.

98. $x_1=-2$.

99. $x_1=-5$.

100. $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$; $x_3=-\frac{2}{3}$.

101. $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{2}$.

102. $x_1=-\frac{2}{3}$ (тройной корень); $x_2=2$ (двукратный корень).

103. $x_1=-2$ (двукратный корень); $x_2=\frac{3}{2}$ (тройной корень).

104. $x_1=-\frac{1}{2}$ (четырехкратный корень); $x_2=3$.

105. $x_1=-4$ (тройной корень); $x_2=\frac{2}{3}$ (двукратный корень).

116. $x_1=-4$ (тройной корень); $x_2=-\frac{2}{3}$ (двукратный корень).

107. $f=(x+2)^3(x-2)^2$.

108. $f=(x-1)^3(x+1)(x+2)$.

109. $f = (x^2+1)^2(x^2+6x+1)$. **110.** $f=(x+2)^3(x-1)^2(x-4)$.

111. $f=7(x+2)^2(x^4+x^3+2x^2+1)$.

112. $f=(x-1)^3(x^2+1)^2$. **113.** $f=(x^2-1)(x^2+1)^3$.

114. $-2 < x_1 < -1$; $-1 < x_2 < 0$; $0 < x_3 < 1$, $3 < x_4 < 4$.

115. $-3 < x_1 < -2$; $0 < x_2 < 1$; $1 < x_3 < 2$.

116. $-5 < x_1 < -4$; $-3 < x_2 < -2$; $0 < x_3 < 1$.

117. $-3 < x_1 < -2$; $x_2 = 1$; $1 < x_3 < 2$.

118. $-3 < x_1 < -2$; $0 < x_2 < 1$; $x_3 = 2$.

119. $2 < x_1 < 3$; $3 < x_2 < 4$; $4 < x_3 < 5$.

120. При $p > 0$ один вещественный корень; при $p < 0$ один или три вещественных корня, смотря по знаку количества $\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1} + \left(\frac{q}{2n}\right)^{2n}$.

121. Два вещественных корня в промежутках: (2, 3) и (3, 4).

122. Корни мнимые.

123. Два вещественных корня в промежутках: (0, 1) и (−1, 0).

124. Два вещественных корня в промежутках: (−1, 0), (−7, −6).

125. Три вещественных корня в промежутках: (2, 3); (−2, −1); (−3, −2).

126. Один корень = 1; другой в промежутке: (2, 3).

127. Один вещественный корень в промежутке: (1, 2).

128. Три вещественных корня в промежутках: (4, 5); (−1, 0); (−6, −5).

129. Корни заключены в промежутках: (0, 1); (3, 4); $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; (−4, −3).

130. Вещественные корни в промежутках: (−6, −5) и (6, 7).

131. Вещественный корень в промежутке: (−2, −1).

132. Вещественный корень в промежутке: (0, 1).

133. Вещественные корни в промежутках: (−1, 0); (5, 6).

134. Вещественные корни в промежутках: (1, 2); (3, 4.

135. Вещественные корни в промежутках: (−2, −1, 5); (−1, 5, 0); (0, 1); (1, 2).

136. 2 корня в промежутках: (0, 0,5) и (0,5, 1) и один корень < 0

137. Вещественные корни в промежутках: (−3, −1); (−1, 0); (0, 1); (1, 3).

138. 2 корня в промежутках: (0, 2) и (3, 4) и один корень < 0.

139. Вещественные корни в промежутках: (−3, −2); (−2, −1); (1, 2); (15, 16).

140. Один отрицательный корень.

141. Один положительный и один отрицательный корень.

142. $V_1 = 3x^2 + p$, $V_2 = -2px - 3q$, $V_3 = -4p^3 - 27q^2$.

143. $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$; $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$.

144. $\pm 0{,}50$, $\pm 1{,}48$.

145. После сближения пределов до 0,1 и однократного применения способа Ньютона $-0{,}19993611 < x < -0{,}19993603$.

146. $-0{,}45 < x_1 < -0{,}42$; $0{,}34 < x_2 < 0{,}399$.

147. Однократное применение способа Ньютона к корню x_3 задачи № 85 $(2{,}12 < x_3 < 2{,}13)$ дает: $2{,}128409 < x_3 < 2{,}128421$.

148. 1,5390; 0,3473; −1,8794.

149. 3,0489; −1,6920; −1,3569.

150. $-2,3300$; $2,1284$; $0,2016$.
151. $-3,5042$; $1,7521 \pm 1,1003\,i$.
152. $0\,3684$; $1,0658 \pm 1,2565\,i$.
153. $2,01157$; $-1,54717$; $1,27532$.
154. $7,8873$; $0,4637$; $-0,1755 \pm 0,4926\,i$.
155. $-1,001 \pm 2,003\,i$; $-1,000 \pm 2,000\,i$.
156. $-1,327133$; $1,071936$; $018769 \pm 1,37350\,i$; $-0,06009 \pm 0,94181\,i$.
157. $0,658231$; $0,371340$; $0,077156$;
$1,065955\,(\cos 99°\,49'\,55'',4 \pm i\,\mathrm{Sin}\,99°\,49'\,55'',4)$.
158. Двукратное применение способа Ньютона-Фурье дает
$$0,5110 < x < 0,5111.$$
159. Двукратное применение способа Ньютона-Фурье к промежутку $(1, 2)$ дает $1,0880 < x < 1,0884$.
160. Применяя три раза способ Ньютона-Фурье к промежутку $(0, 1)$, получаем $0,09127 < x < 0,09129$.
161. $0,56 < x < 0,57$.
162. $0,535 < x_1 < 0,536$; $2,70 < x_2 < 2,71$.
163. $3,5972850$.
164. $0,73908512$.
165. $4,49340964$.
166. $4,73004099$.
167. $1,4458$.
168 $3\,6765$.
169. 38.
170. $a^2b - 2b^2 - ac + 4d$.
171. -9.
172. 74.
173. -1.
174. $y = 5x^2 + x - 6$.
175. $y = -\frac{1}{4}(2x^3 + 3x^2 + 4x + 7)$.
176. $y = \frac{1}{7}(4x^2 - x \quad 2)$.

ОТДЕЛ V.

1. $\frac{1}{a}$.
2. $\frac{2^a - 1}{a}$.
3. $\frac{m}{m+n}$.
4. $\frac{m}{m-n}$.
5. $\frac{\pi}{2}$.
6. $\frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$.
7. $\frac{1}{2} \log 3$.
8. 2.
9. $1 - \cos a$.
10. 0.
11. 1.
12. $\log 2$.
13. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.
14. $1 - \frac{\pi}{4}$.
15. $-\log 2$.
16. 1.
17. $\frac{\pi}{3}$.
18. $\frac{\pi}{3}$.
19. -1.
20. $14\frac{4}{7}$.
21. $\frac{\pi}{2}$.
22. $\frac{\pi}{2}$.
23. 23,8.
24. 1,1072.
25 0,287684.
26. 1,0986.
27. 0,38962.

---

28. $\frac{1}{2a}(ax+b)^2$.
29. $\frac{A}{b}\left[x - \frac{a}{b} \log(a+bx)\right]$.
30. $\frac{1}{8}(2x+5)^4$.
31. $\frac{1}{3} \log(3x+5)$.
32. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \log(2x+1)$.
33. $\frac{1}{2} \log(x^2+1)$.
34. $\frac{1}{6} \log(3x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
35. $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{32} \log(4x^2+1)$.
36. $\frac{1}{3} \log(x^3+1)$.
37. $\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{12} \log(2x^3+5)$.
38. $\frac{1}{na} \log(ax^n+b)$.

39. $\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\ldots+\frac{x^2}{2}+x+\log(x-1).$

40. $\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a}.$

41. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x\sqrt{2}}{3}.$

42. $x-arctg\,x.$

43. $\frac{1}{3}x^3+x+arctg\,x.$

44. $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\log(x^2+1).$

45. $\frac{1}{2a}\,arctg\,\frac{x^2}{a}.$

46. $\frac{1}{6}\,arctg\,\frac{x^3}{2}.$

47. $\frac{1}{na}\,arctg\,\frac{x^n}{a}.$

48. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+1)^4}.$

49. $\sqrt{x^2+1}.$

50. $\frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3+1)^3}.$

51. $\frac{p}{n(p-1)}\sqrt[p]{(x^n+a)^{p-1}}.$

52. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}.$

53. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}.$

54. $\sqrt{x^2-a^2}-a\,arctg\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$

55. $arc\sin\frac{x}{a}.$

56. $\frac{1}{3}\,arc\sin\frac{3x}{2}.$

57. $\frac{1}{2}\,arc\sin\frac{x^2}{a}.$

58. $\frac{1}{4}\,arc\sin\frac{x^4}{a}.$

59. $\frac{1}{n}\,arc\sin\frac{x^n}{a}.$

60. $2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x}).$

61. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-12\sqrt[3]{x}+48\log(4+\sqrt[3]{x}).$

62. $2\sqrt{x+1}-2\log(1+\sqrt{x+1}).$

63. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}-3\sqrt[3]{x^2+1}+6\log(2+\sqrt[3]{x^2+1}).$

64. $2\sqrt{x}-2\,arctg\sqrt{x}.$

65. $\sqrt{\frac{2}{3}}\,arctg\sqrt{\frac{2x}{3}}.$

66. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

67. $-arc\sin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

68. $x-\log(e^x+1).$

69. $\frac{1}{2}e^{x^2}.$

70. $\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{e^x}{2}.$

71. $x-\frac{1}{e^x}.$

72. $\frac{1}{2}\log^2 x.$

73. $\frac{1}{3}\,arctg^3 x.$

74. $-\frac{1}{2\,arc\sin^2 x}.$

75. $-\frac{1}{6}\cos^6 x.$

76. $3\sqrt[3]{\sin x}.$

77. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}.$

78. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}.$

79. $-2\sqrt{1+\cos^2 x}.$

80. $\frac{1}{2}\log(2\sin^2 x+3).$

81. $-\log(\cos^2 x+4).$

82. $-\frac{2}{9}\log(3\cos^3 x+2).$

83. $-\log\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x.$

84. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}$. 85. $-\frac{1}{5}\log\cos 5x$.

86. $-\frac{1}{3}\log\cos 3x$. 87. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}$.

88. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 89. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right)$.

90. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{tg} x\right)$. 91. $\frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4$.

92. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}$. 93. $-\frac{\log x}{4x^4} - \frac{1}{16x^4}$.

94. $-\frac{1}{x}\{\log^3 x + 3\log^2 x + 6\log x + 6\}$.

95. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

96. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg} x\,(x^6+1) - \frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{18} - \frac{x}{6}$.

97. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

98. $\frac{1}{3}x^3\arcsin x + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}$.

99. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

100. $-\arcsin x\sqrt{1-x^2} + x$. 101. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)$.

102. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$. 103. $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

104. $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$.

105. $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x$.

---

106. $\begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, & \text{если } |x|<1. \\ \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}, & \text{если } |x|>1. \end{cases}$

107. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\log\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. 108. $\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}$.

109. $-x + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{12}{x-2} - 6\log(x-2)$.

110. $\frac{1}{x} + \log\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

111. $x + 2\log(x-1) - 5\log(x-2) - \frac{9}{x-2}$.

112. $\frac{1}{4}\log\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2(x-2)}$.

113. $\frac{3(x-1)}{16(x+1)} - \frac{x+1}{16(x-1)} - \frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2} + \frac{3}{16}\log\frac{x+1}{x-1}$.

114. $\frac{(x+1)^2}{6(x-2)^2} - \frac{x-1}{x+2} + \frac{x-2}{3(x+1)} - \log\frac{x-2}{x+1}$.

115. $\frac{x-3}{2(1-x^2)} + \log\frac{x^3}{\sqrt[4]{(x+1)^5(x-1)^3}}$.

116. $\frac{x^6}{(x-1)^2(x+1)}$.

117. $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\log(x+1)}{2}-\frac{\log(x^2+1)}{4}$.

118. $\frac{1}{4}\left\{\frac{x+1}{x^2+1}+\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+2\,\mathrm{arctg}\,x\right\}$.

119. $\frac{1}{a^2+b^2}\left[\log\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{b}\right]$.

120. $\frac{1}{2(n+1)}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{n}}{1+n}\,\mathrm{arctg}(x\sqrt{n})$, если $n>0$.

$\frac{1}{2(1-m)}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{m}}{2(1-m)}\log\frac{x\sqrt{m}+1}{x\sqrt{m}-1}$, если $n<0$ и $n=-m$.

121. $\frac{0,4}{1+2x}-0,5\log(1+x)-0,07\log(1+x^2)+0,64\log(1+2x)+$ $+0,02\,\mathrm{arctg}\,x$.

122. $\frac{3x^2-1}{3x^3}+\log\sqrt{1+x^2}+\mathrm{arctg}\,x$.

123. $\frac{1}{3}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

124. $\frac{1}{3}\log\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

125. $\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x$. 126. $\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x$.

127. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

128. $-x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

129. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

130. $-\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{9}\log\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$.

131. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

132. $\frac{1}{24}\log\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+2)(x-1)^2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$.

133. $\frac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{11}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}-$ $-\frac{1}{3\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{15}}$.

134. $\frac{(x+1)^2}{2}+\log\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}-\mathrm{arctg}\,x$.

135. $\log\sqrt{\frac{x^3(x+1)^2}{x+2}}$.

136. $\frac{16}{5(x+2)}+\frac{44}{25}\log(x+2)+\frac{31}{25}\log(x-3)$.

137. $\log[(x+1)^4(x-2)^3(x-1)^2]$.

138. $\log\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

139. $\frac{1}{4}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}$

140. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\log\frac{(x^2+2)^2}{x+1}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

141. $-\frac{11x^2+18x+13}{3(x^2+1)(x^2+x+1)}$ (алгебраич. часть).

142. $\frac{x^2+1}{3(x^3+1)}$ (алгебраич. часть).

143. $-\frac{x}{x^2+x+1}$ (весь интеграл).

144. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. 145. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{3/2}-(x+b)^{3/2}\right]$.

146. $\log(\sqrt[3]{x}-1)-\frac{1}{2}\log(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{(2\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{3}}{3}$.

147. $-\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}-\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}-(x+1)-\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}-$
$-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}$.

148. $6\sqrt[6]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\log(1+\sqrt[6]{x})+$
$+\log(1+\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{(2\sqrt[6]{x}-1)\sqrt{3}}{3}$.

149. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

150. $\frac{36}{5}\sqrt[6]{x}-\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}+3\log\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{(1+\sqrt[6]{x})^3}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$.

151. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}}$.

152. $\frac{2t^5}{(t^3-1)^2}+\frac{10t^2}{3(t^3-1)}+\frac{10}{9}\log(t^2+t+1)-\frac{20}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-$
$-\frac{20}{9}\log(t-1)$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

153. $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

154. $\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\log\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

155. $\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

156. $\frac{3}{16}(3x+5)\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^4}}$.

157. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

158. $\log(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}-x}+C.$

159. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

160. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

161. $\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{2\sqrt{ax-x^2}}$ или $\arcsin\left(\frac{2x-a}{a}\right).$

162. $\log(2x-a+2\sqrt{x^2-ax}).$

163. $\operatorname{arctg}\frac{3-2x}{2\sqrt{2-3x-x^2}}$ или $\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}.$

164. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(3x+\frac{1}{2}+\sqrt{9x^2+3x+3}\right).$

165. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).$

166. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

167. $\left(-\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{27}{8}\arcsin(2x-3).$

168. $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\log(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}).$

169. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}).$

170. $\frac{1}{4}x(x^2-1)\sqrt{x^2+2}-\log\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}.$

171. $\log\frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}.$

172. $\frac{(3x-4)\sqrt{x^2+2x+4}}{32x^3}+\frac{1}{64}\log\frac{x+4+2\sqrt{x^2+2x+4}}{x}.$

173. $\frac{(x-2)\sqrt{x+1}}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$

174. $\frac{1}{2\sqrt{7}}\log\frac{x-1-\sqrt{7}-\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1+\sqrt{7}-\sqrt{x^2+2x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{x+1-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+4}}{x+1+\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+4}}.$

175. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}+3\log(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})+$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x+1-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x-1}}{x+1+\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x-1}}.$

176. $\frac{1}{3\sqrt{6}}\log\frac{x-1-\sqrt{6}-\sqrt{x^2+2x+3}}{x-1+\sqrt{6}-\sqrt{x^2+2x+3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\log\frac{x+2-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+3}}{x+2+\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+3}}.$

177. $\log(x-1+\sqrt{x^2-2x-1})+\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1+\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}}-$

$-\frac{2}{\sqrt{2}}\log\frac{x+1-\sqrt{2}+\sqrt{x^2-2x-1}}{x+1+\sqrt{2}+\sqrt{x^2-2x-1}}.$

178. $-\frac{9}{7}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1}+\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})+$

$+\frac{10}{7\sqrt{7}}\log\frac{x-1-\sqrt{7}+\sqrt{x^2+2x+4}}{x-1+\sqrt{7}+\sqrt{x^2+2x+4}}.$

179. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\log(x+\sqrt{x^2+1}).$

180. $\sqrt{(a-x)(x-b)}+(a-b)\,arctg\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

181. $\frac{1}{12}\left\{(6x\sqrt{x}-8x+9\sqrt{x}-16)\sqrt{1-x}-9\,arc\sin\sqrt{x}\right\}$.

182. $\frac{1}{2}x(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})$.

183. $\log(x+1)+\log(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{x-1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

184. $x+\sqrt{x^2-x+1}+\log\frac{(x-1)^2}{x+1-2\sqrt{x^2-x+1}}+$
$+\frac{1}{2}\log(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$.

185. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

186. $\frac{8(2x+1)}{9\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2(x+1)^3}{27\sqrt{(x^2+x+1)^3}}$.

187. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+3}}-\frac{x^3}{27\sqrt{(x^2+3)^3}}$.

188. $\frac{1}{R^3}-\frac{4(x+2)}{9R}+\frac{4(x+2)^3}{27R^3}$, где $R=\sqrt{x^2+4x+1}$.

189. $\frac{1}{2}\log(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{2}\log\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]+$
$+\frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}$

190. $-z-\frac{1}{6}\log\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}$.

191. $\frac{1}{10}\log\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\,arctg\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z=\sqrt[3]{1+x^5}$.

192. $\frac{1}{6}\log\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}$.

193. $\frac{1}{4}\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{1}{2}\,arctg\,z$, где $z=\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$.

194. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

195. $\frac{z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{6}\log\frac{z+1}{\sqrt{z^2-z+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$,
где $z=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

---

196. $-\cos x+\frac{4}{3}\cos^3x-\frac{6}{5}\cos^5x+\frac{4}{7}\cos^7x-\frac{1}{9}\cos^9x$.

197. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{6}\sin x\cos x\left\{\cos^4x+\frac{5}{4}\cos^2x+\frac{15}{8}\right\}$.

198. $\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2x}+\frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4x}+\frac{5}{8}\log cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

199. $-\left(cotg\,x+\frac{2}{3}cotg^3x+\frac{1}{5}cotg^5x\right)$.

200. $\frac{1}{15}\cos^3x\,(3\cos^2x-5)$.

201. $\frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{2}{5}\sin^{10}x + \frac{1}{2}\sin^{12}x - \frac{2}{7}\sin^{14}x + \frac{1}{16}\sin^{16}x$.

202. $\frac{1}{10}\sin^7 x\cos^3 x + \frac{3}{80}\sin^7 x\cos x - \frac{1}{160}\sin^5 x\cos x -$
$- \frac{1}{128}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{256}\sin x\cos x + \frac{3}{256}$.

203. $\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{3}{2}\cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{4} - 3\log\cos x$.

204. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\sin x\cos x - \frac{3}{2}x$. 205. $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \log\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

206. $\log\operatorname{tg} x - \frac{1}{2\sin^2 x}$. 207. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10\operatorname{tg}^2 x + 1)}{3\operatorname{tg}^3 x}$.

208. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 4\log\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{cotg}^6 x$.

203. $\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{cotg}^4 x) + 2(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 6\log\operatorname{cotg} x$.

210. $\frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} + \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}\right)$.

211. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}$. 212. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

213. $\frac{5}{4}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}$.

214. $\frac{z}{2(z^4+1)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\log\sqrt{\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}} + \operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}\right\}$,
где $z = \sqrt{\operatorname{cotg} x}$.

215. $\frac{5}{14}\sqrt[5]{\cos^{14} x} - \frac{5}{4}\sqrt[5]{\cos^4 x}$.

216. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \log\cos x$.

217. $-\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + c$.

218. $-\frac{1}{5}\operatorname{cot}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x - x$.

219. $\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+1}{\sqrt{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+1}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{\sqrt{3}}$.

220. $\frac{1}{2}\{x + \log(\sin x + \cos x)\}$.

221. $\frac{4}{25}x + \frac{3}{25}\log(4\cos x + 3\sin x)$.

222. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\cos x - \sin x + \sqrt{2}}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{2(\sin x + \cos x)}$.

223. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)$. 224. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

225. $\frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}}$. 223. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\log\operatorname{tg} x$.

227. $\frac{\sqrt{2}}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)$. 228. $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{10}}$.

229. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{b\sin x-a\cos x+\sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x+b\cos x}$.

230. $\log\frac{\sqrt{\operatorname{tg}x-1}}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}$.

231. $\frac{23}{29}x-\frac{14}{29}\log(5\cos x+2\sin x)$.

232. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cos 2x)^2}$.

233. $\frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}$.

234. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\cos x\sqrt{2}+\sqrt{\cos 2x})$.

235. $\frac{1}{\sin a}\log\frac{\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}$.

236. $\frac{3}{2}\sin^2x-\frac{1}{2}\cos^2x+\log\cos x$.

237. $\log\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2x}}$.

238. $\frac{1}{4}\log\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

239. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}+\operatorname{cotg}x$.

240. $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x$.

241. $-\frac{3}{2}\frac{\sin x}{\cos^2x}+\frac{5}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$.

242. $\frac{2}{\cos^2x}-\frac{1}{4\cos^4x}$.

243. $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, при $a^2>b^2$;

$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\cos x+\sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$, при $b^2>a^2$.

244. $2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$.

245. $\sqrt{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)$.

246. $-\frac{\cos x}{2+\sin x}$.

247. $\frac{x}{2}(\sin\log x-\cos\log x)$.

248. $\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\log\operatorname{tg}x$.

249. $-\frac{1+\log\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}$.

250. $-x-\frac{\log\cos x}{\operatorname{tg}x}$.

251. $-\frac{\sin^4x+3\cos^4x}{4}$.

252. $\log\sin x-\frac{x^2}{2}-x\operatorname{cotg}x$.

253. $\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin 3x}{2}+\frac{\sin 7x}{7}+\sin x+\frac{\sin 9x}{9}\right\}$.

254. $-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12}-\frac{6}{5}\cos\frac{5x}{12}$.

255. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}\right)$.

256. $2x\sin x+(2-x^2)\cos x$.

257. $\frac{2^x(\sin x+\cos x\cdot\log 2)}{1+(\log 2)^2}$.

258. $\cos 2x\left\{\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right\}+\sin 2x\left\{\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right\}$.

259. $\frac{1}{10}e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$.

260. $\frac{1}{2} e^x \left\{(x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x\right\}$.

261. $\log(e^x + e^{-x} + 2)$.

262. $x - \log\left[2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right]$.

263. $\frac{x^2 e^{x^2}}{2}$.

264. $\frac{e^x}{1+x}$.

265. $x(\log^3 x - 3\log^2 x + 6\log x - 6)$.

266. $x\log(1+x^4) - 4x + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \sqrt{2}\, arctg\, \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

267. $\frac{0,05}{2x+5} + 0,01 \log x - 0,01 \log(2x+5) - \frac{0,25\log x}{(2x+5)^2}$.

268. $\frac{1}{4(x+1)} - \frac{\log(x-1)}{2(x+1)^2} + \frac{1}{8}\log\frac{x-1}{x+1}$.

269. $\log\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} - \frac{\log(x^2-x+1)}{x} + \sqrt{3}\, arctg\, \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

270. $arctg\,\sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$.

271. $\sqrt{1-x^2}\,\log\frac{\sqrt{1-x}}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\, arc\sin x +$
$+ \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}$.

272. $x\log(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(arc\sin x - x)$.

273. $x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

274. $x(arc\sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\, arc\sin x - 2x$.

275. $-\frac{arc\sin x}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

276. $-\sqrt{1-x^2}\, arc\,tg\, x - \sqrt{2}\, arctg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}} + arctg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

277. $x\, arctg\,\frac{a}{x-a} + a\, arctg\,\frac{x-a}{a} - \frac{a}{2}\log\left[\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+1\right]$.

278. $-\frac{1}{4(x+1)} - \frac{arctg\, x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{4}\log(1+x) - \frac{1}{8}\log(1+x^2)$.

279. $\frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{1}{4}\, arctg\, x - \frac{1}{2}\,\frac{arctg\, x}{1+x^2}$.

280. $\frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\, arctg\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, th\,\frac{x}{2}\right]$.

281. $\frac{3}{8\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+th\, x}{\sqrt{2}-th\, x} - \frac{th\, x}{4(2-th^2 x)}$.

282. $\frac{1}{2}\, th\,\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\, th^3\frac{x}{2}$.

283. $sh\, x + \frac{2}{3}\, sh^3 x + 0,2\,(sh^5 x + ch^5 x)$.

284. $\frac{1}{\sqrt{1-th\,x}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-th\,x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-th\,x}}$.

285. $2\sqrt{ch\,x}+0{,}4\sqrt{ch^5 x}$.

286. $\frac{1}{2}\log\frac{ch\,x-1}{ch\,x+1}-\log th\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{ch\,x}{sh^2 x}$.

287. $\frac{1}{48}(2\,sh\,6x+3\,sh\,4x+6\,sh\,2x+12x)$.

288. $\log ch\,x+\frac{1}{2\,ch^2 x}$.

289. $\log\sqrt{\frac{1+\sqrt{th\,x}}{1-\sqrt{th\,x}}}-arctg\sqrt{th\,x}$.

290. 1.

291. $\log 4-1$.

292. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

293. $\frac{\pi}{2}(a^2-b^2)$.

294. $\frac{8}{5}a^2$.

295. 2π.

296. 1.

297. Площ. $ALB=\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2$.
Площ. $LCD=\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}-\pi\right)a^2$.

298. $\frac{16+6\pi}{3}p^2$.

299. $\frac{88\sqrt{2}}{15}p^2$.

300. $\omega_x=\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}-(r-h)x$

301. π.

302. $\frac{3}{8}\pi\frac{c^4}{ab}$.

303. a^2.

304. $\frac{a^2}{2}(1{,}5-\log 2)$.

305. $\frac{\pi a^2}{4}$.

306. $\frac{\pi a^2}{4}$.

307. $18\pi a^2$.

308. $\frac{a^2}{2}\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

309. $a\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2a}\right)$.

310. $\sqrt{y^2-a^2}$.

311. $\frac{x+3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}$.

312. $\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p}+\frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$.

313. $\frac{8}{27}p\left[\left(1+\frac{9y_0}{4p}\right)^{3/2}-1\right]$.

314. $p(2\sqrt{2}-1)$.

315. $6a$.

316. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

317. $s=\frac{5}{[illegible]}a\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})\right\}$; длина всей кривой равна $4s$.

318. $x+\frac{2x^3}{27}$.

319. $x+\sqrt{2ax}$.

320. $z\sqrt{2}$.

321. $\sqrt{cz}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{z^3}{c}}$.

322. $a\sqrt{2}\cdot\arccos\frac{r}{a}$.

322. $v_x=\frac{\pi}{2}(\log 4-1)$; $v_y=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

324. $\pi p a^2\left(\frac{pq}{a^2}-\frac{a^2}{pq}-2\log\frac{pq}{a^2}\right)$. **325.** $\pi\left(\frac{n^3}{60}+\frac{an^2}{2\pi}+\frac{n}{4}\right)$.

326. $\frac{272}{405}\pi\sqrt{3}$. **327.** $\frac{\pi}{20p^2}(y^5-y_0^5)$.

328. $\frac{\pi b^2}{a^2}(x-x_0)\left[a(x+x_0)-\frac{x^2+xx_0+x_0^2}{3}\right]$.

329. $\frac{\pi b^2}{a^2}(x-x_0)\left[a(x+x_0)+\frac{x^2+x_0x+x_0^2}{3}\right]$.

330. $\frac{\pi a^2}{b^2}(y-y_0)\left[b^2+\frac{y^2+yy_0+y_0^2}{3}\right]$.

331. $\frac{2}{3}\pi b^2h$. **332.** $\frac{16}{3}$.

333. $\frac{\pi a^3}{4}$. **334.** $\frac{4}{15}a^2\sqrt{2pa}$.

335. $\frac{4}{15}a^{5/2}$. **336** $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$.

337. 2π. **338.** $\frac{a^2b}{2}$.

339. $v_x=2\,tg\,\alpha\left\{\frac{x^2}{2}\sqrt{\frac{2r-x}{x}}\left[\frac{3a+r-2x}{3}+\frac{r}{x}(r-a)\right]+r^2(r-a)\,arctg\sqrt{\frac{2r-x}{x}}\right\}+C$, где $C=-\pi r^3(r-a)\,tg\,\alpha$; при $a=r$: $v=\frac{2}{3}r^3\,tg\,\alpha$, при $a=2r$: $v=\pi r^3\,tg\,\alpha$.

340. $\frac{r^2h}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)$. Общее выражение для объема:
$v_x=-\frac{4}{3\cos\alpha\sin 2\alpha}\left\{x^2\sqrt{(2r\cos\alpha-x)x}\cdot\left(\frac{r^2\cos^2\alpha}{2x^2}+\frac{r\cos\alpha}{6x}-\frac{1}{3}\right)+r^3\cos^3\alpha\,arctg\sqrt{\frac{2r\cos\alpha-x}{x}}\right\}$. Пределы для x: 0 и $r\cos\alpha$.

341. $\frac{8\sqrt{2}}{15}a^2\sqrt{ap\,tg\,\alpha}$. **342.** $v=\frac{r^2h}{2}$, $v_1=\frac{2}{3}r^2h\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

343. $v=\frac{r^2h}{12}(3\pi-4)$, $v_1=\frac{r^2h}{6}\left(3\varphi-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$.

344. $v=\frac{2}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **345.** $\frac{1}{4}\pi bcl$.

346. $4\pi b^2$. **347.** $\pi\log(\sqrt{2}+1)+\pi\sqrt{2}$.

348. $\frac{2\pi}{3}\left[(2x+p)\sqrt{2px+p^2}-p^2\right]$.

349. $\frac{\pi}{15}\left(\frac{8}{9}p\right)^2\left[\left(1+\frac{9}{4p}y_0\right)^{3/2}\left(\frac{27}{4p}y_0-2\right)+2\right]$.

350. $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin e}{e}$, где $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

351. $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{e}\log\left[\frac{a}{b}(1+e)\right]$, где $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

352. $\frac{12\pi a^3}{5}$. **353.** $\frac{52}{3}\pi$.

---

354. $\frac{7}{120}a^2$. **355.** $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\cdot\frac{\alpha-\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}$.

356. $\frac{2}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3})$.

357. $(a^2-b)^2 \log\frac{m}{n}$.

358. $\frac{1}{6}(m^2-n^2)(\alpha^3-\beta^3)$.

359. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\log\frac{\alpha}{\beta}$.

360. $\frac{1}{6}Mh^2$.

361. $\frac{1}{5}Mh^2$.

362. $\frac{8}{35}Mh^2$.

363. $x_c=y_c=\frac{256}{315\pi}a$.

364. $x_c=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{8}{9\pi}\right)a,\ y_c=\frac{5}{6}a$.

365. $\frac{4}{9}(ab)^{3/2}$.

366. πR^3.

367. $\frac{1}{3}abc$.

368. $\frac{1}{18}a^3$.

369. $\pi a^2\sqrt{pq}$.

370. $\frac{1}{2}\pi ac^2$.

371. $\frac{7\pi}{64}$.

372. $\frac{16\sqrt{2}}{5}$.

373. $\frac{88}{105}$.

374. π.

375. $\frac{3\pi}{32}\cdot\frac{a^4}{c}$.

376. $\pi a^3(\alpha-\beta)$.

377. $\frac{4}{9}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{\alpha}}$.

378. $\frac{\pi}{8}$.

379. $\frac{81}{32}\pi a^3$ (ввести $x=-\frac{a}{2}+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$).

380. $\frac{1}{2}p(a+p)^2$.

381. πR^3.

382. $a^3\left(\frac{17}{12}-\log 4\right)$

383. $\frac{1}{8}\pi ab\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$.

384. $\frac{1}{8}\cdot\frac{a^2b^2}{c}$.

385. $16a\sqrt{ap}$.

386. $\frac{2\sqrt{2}}{3}(a+b)\sqrt{ab}$.

387. $\frac{4}{3}p\sqrt{pq}\left[\left(1+\frac{2a}{p}\right)^{3/2}-1\right]$.

388. $8a^2\cdot\arcsin\frac{b}{a}$.

389. π.

390. $4a^2$.

391. $\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

392. $\frac{4}{3}\pi R^3(\cos^4\beta-\cos^4\alpha)$.

393. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

394. $\frac{1}{360}a^3$.

395. $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$.

396. $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$, $\Delta=\begin{vmatrix}a_1b_1c_1\\ a_2b_2c_2\\ a_3b_3c_3\end{vmatrix}$.

397. $\frac{2\pi h}{|\Delta|}$ (см. зад. 396).

398. $\frac{4\pi}{3|\Delta|}$ (см. зад. 396).

399. $\frac{4}{3|\Delta|}$ (см. зад. 396).

400. $\frac{3}{10}MR^2$.

401. $\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$.

402. $\frac{1}{10}M(a^2+b^2)$.

403. $\left(\frac{3}{5}a,\ \frac{3}{5}b,\ \frac{9}{22}\sqrt{ab}\right)$.

404. $\left(\frac{1}{3}a,\ \frac{1}{2}b,\ \frac{2}{9}c\right)$.

405. $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}H\right)$.

ОТДЕЛ VI.

1. $z = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$.

2. $z = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + C$.

3. $z = C + \log(x + y) - \frac{y}{x + y}$.

4. $z = \frac{x - y}{(x + y)^3} + C$.

5. $z = c + xy + \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$ при $n = 1$.

7. $a = b = 1$; $z = \frac{x - y}{x^2 + y^2} + C$.

8. $v = C + \frac{x - 3y}{z}$.

9. $v = C + \frac{1}{2} \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$.

10. $a = 1$, $b = 1$; $c = 2$; $a' = \frac{1}{2}$; $b' = \frac{1}{2}$; $c' = \frac{3}{2}$; $v = C - \frac{2x + 2y + 3z}{2(x + y + z)^2}$.

11. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

12. $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C$.

13. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$.

14. $x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$.

15. $\sqrt{1 + x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$.

16. $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

17. $x^2 - y^2 = Cy^2$.

18. $\frac{xy}{x - y} + \log \frac{x}{y} = C$.

19. $2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) = C$.

20. $y = e^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$.

21. $y^2 - 2 \log(1 + e^x) = C$.

22. $y = a \operatorname{tg}\left(C - \frac{\sqrt{ax - x^2}}{x}\right)$.

23. $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$.

24. $x^{-2} + y^{-2} = 2 \log\left(\frac{x}{y}\right) + C$.

25. $y = Ce^{xy}$.

26. $\log(xy) + x - y = C$.

27. $x + C = \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{x - y}{2}}$.

28. $\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{2} \log x = C$.

29. $2x^3y^3 = 3a^2x^2 + C$.

30. $y^2 + \frac{x^2}{y^3} = C$.

31. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u - v}{2}\right) = u + C$.

32. $ax + by + c = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}(x\sqrt{ab} + C)$.

33. $y = \frac{x}{x - 1} + Cx$.

34. $y = Ce^{x^3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$.

35. $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$.

36. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}(C + x)$.

37. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m + a}$.

38. $y = (x + 1)^n(e^x + C)$.

39. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

40. $y = a\log x + \frac{C}{x}$.

41. $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$.

42. $y = ax^2 + Cx\sqrt{1 - x^2}$.

43. $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.

44. $y = 1$.

45. $y = -3e^{-\frac{x^3}{3} - 1} - x^3 + 3$.

46. $y = -1$; $y = Cx$.

47. Одна асимптота $x = 0$, другая проходит через точку $(2a, 0)$.

48. $y^3 = Ce^{ax} - \frac{x + 1}{a} - \frac{1}{a^2}$.

49. $e^y = \frac{x^4}{2} + cx^2$.

50. $e^{2y} = Ce^{-2x} + \frac{2}{3}e^x$.

51. $e^y(1 - Cx) = 1$.

52. $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$.

53. $x = y^2(C - \log y)$.

54. $x = Ce^{y} - y^2 - 2y - 2$.

55. $y^2 - 2x = Cy^3$.

56. $x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}$.

57. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.

58. $\frac{1}{y} = C\sqrt{1 - x^2} - a$.

59. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.

60. $ny^n = Ce^{\frac{nx}{a}} + nx - a$.

61. $(1 + Cx + \log x)y = 1$.

62. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$.

63. $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = 1$.

64. $y = \left(Ce^{x^3} - \frac{x^3 + 2}{9}\right)^3$.

65. $y = \left(\frac{C + \log\cos x}{x} + \operatorname{tg}x\right)^2$.

66. $y^3 = Ce^{-\frac{2a}{x}} + \frac{b}{2a^2}\left(1 - \frac{2a}{x}\right)$.

67. $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

68. $x^3y = Ce^{-\frac{a}{x}}$.

69. $y = 2 + (2 + a^2)e^{\frac{x^2 - a^2}{2}}$.

70. $y = \sqrt{x}\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$.

71. $y^2 = 1 - (2a + 1)e^{x - a}$.

72. $(x + y)^2(2x + y)^3 = C$.

73. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \log C\sqrt{x^2 + y^2}$.

74. $y^3 = C(y^2 - x^2)$.

75. $x^2 - y^2 = C(x + y)$.

76. $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$.

77. $\log y + \frac{x}{y} = C$.

78. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$.

79. $\frac{2x}{x - y} + \log\{(y + x)(y - x)^3\} = C$.

80. $ye^{-\frac{y}{x}} = C$.

81. $x = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

82. $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$.

83. $y = x\sqrt{C + 2\log x}$

34. $x^2 + y^2 = Cy$.

85. $x^2 = C^2 + 2Cy$.

86. $y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{1}{2C}$.

87. $x^2 = C(y + \sqrt{x^2 + y^2})$.

88. $\sqrt{\frac{x}{y}}\log y = C$.

89. $\log\frac{y}{x} = Cx$.

90. $\log x = \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{x + y} + C$.

91. $y = xe^{1 + Cx}$.

92. $y = x(1 - x)^2 + x$; $y = x$

93. $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$

94. $x + 2y + 3\log(2 - x - y) = C$.
95. $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$.
96. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.
98. $x - \frac{y}{x} = C$. **99.** $\frac{y}{x} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} - ax - \frac{x^2}{2} = C$.
100. $y^2 - 2xy - \frac{2}{x} = C$.
101. $x\sin y + y\cos y - \sin y = Ce^{-x}$.
102. $x^2 + \frac{2x}{y} = C$. **103.** $x^2 - \frac{x}{y} + y + \log y = C$.
104. $\frac{x}{y} + \cos x - tg\, y = C$. **105.** $x^3 + xy + y^3 = C(x + y)$.
106. $\frac{xy + x + y}{(x + y)(x + y + 2)} = C$. **107.** $y^2 - x^2 - Cx + 1 = 0$.
108. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$.
109. $\left(y - \frac{1}{2}x^2 - C\right)(y + x - 1 - Ce^{-x}) = 0$.
110. $y = \frac{x}{2}\left(Ce^x + \frac{1}{Ce^x}\right)$.
111. $\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0$.
112. $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$. **113.** $x^3y^2 - Cxy(1 + x) + C^2 = 0$.
114. $x^2(x^2 - 3y^2)^2 - 2Cy(y^2 - 3x^2) - C^2 = 0$.
115. $x^3y^2 - 2Cx^{\frac{3}{2}}y\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + C^2 = 0$.
116. $x = Ce^{\theta + \frac{1}{2}e^{-2\theta}}$; $y = 2C\,ch\,\theta e^{\theta + \frac{1}{2}e^{-2\theta}}$.
117. $(y - C)^3 - 3x^2(y - C) + x^3 = 0$.
118. $x = C + 2p + 3p^2$, $y = p^2 + 2p^3$. Особ. реш. $y = 0$.
119. $y = x - C - \frac{1}{x - C}$. Особ. реш. $y = \pm 2i$.
120. $y = a\,ch\frac{x + C}{a}$. Особ. реш. $y = a$.
121. $x + C = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} - \log\frac{1 + \sqrt{1 + p^2}}{p}$, $y = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Ос. реш. $y = 0$.
122. $y + C = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
123. $\frac{y}{2} + C = \sqrt{\frac{x - x^2}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}$.
124. $x^{\frac{2}{3}} + (y + C)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
125. $x = ap + bp^2$, $y = C + \frac{1}{2}ap^2 + \frac{2}{3}bp^3$.
126. $(x - 1)^2 = \frac{64}{27}(y - C)^3$. **127.** $x = \frac{1 + t}{t^3}$; $y = C + \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$.
128. $x^2 + (y - C)^2 = a^2$.
129. $2y - x^2 \pm \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} \pm \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = C$.
130. $y = Cx + C^2$. Особ. реш. $x^2 + 4y = 0$.
131. $y = Cx + C - C^2$. Особ. реш. $4y = (x + 1)^2$.
132. $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$. Особ. реш. $x^2 + y^2 = a^2$.
133. $y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2}$.

134. $x = Cy + C^2$. Особ. реш. $y^2 + 4x = 0$.

135. $x = \frac{C}{\sqrt{1+t^2}\,(t+\sqrt{1+t^2})^a}$; $y = x\,(t + a\sqrt{1+t^2})$.

136. $y^2 = 2Cx + C^3$. Особ. реш. $27y^4 + 32x^3 = 0$.

137. $2(x-C)^3 + 3(y-C)^2 = 0$. Особ. реш. $y - x = \frac{2}{9}$.

139. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Особ. реш. $y = 0$.

140. $x = Ce^{-t} + 2(1-t)$; $y = x(1+t) + t^2$.

141. $x = \frac{C}{t^2} + \frac{2}{3}t$; $y = \frac{2C}{t} + \frac{1}{3}t^2$.

142. $$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} + \frac{a\sqrt{1+p^2}}{2p} + \frac{a}{2p^2}\log(p+\sqrt{1+p^2}), \\ y = \frac{2C}{p} + \frac{a}{p}\log(p+\sqrt{1+p^2}). \end{cases}$$

143. $x = \frac{C}{t^2} - \frac{\sqrt{1+t^2}}{2t} + \frac{1}{2t^2}\log(t+\sqrt{1+t^2})$, $y = 2xt + \sqrt{1+t^2}$.

144. $x = \frac{Ce^{-\mathrm{arctg}\,t}}{1+t^2}$; $y = \frac{Ce^{-\mathrm{arctg}\,t}(1-t+t^2)}{1+t^2}$.

145. $x = \frac{C(p^2-p+1)\,e^{-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,p}}{\sqrt[4]{(p-1)^2(p^2+1)^3}}$; $y = \frac{Ce^{-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,p}}{\sqrt[4]{(p-1)^2(p^2+1)^3}}$.

146. $x = \frac{1}{3\sqrt{p}} - \frac{p}{3}$; $y = -\frac{p^3}{6} - \frac{1}{3}\sqrt{p}$.

147. $y = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)} - \frac{28}{27}$.

148. Условие возможности: $y_0 + x_0^2 > 0$. Уравнение искомых кривых: $(C + 3xy + 2x^3)^2 = 4(y+x^2)^3$, где $C = -3x_0y_0 - 2x_0^3 \pm 2\sqrt{(y_0+x_0^2)^3}$.

149. $4y + (x+1)^2 = 0$.

150. $4y + x^3 = 0$.

151. $y = -\frac{x^5}{4}$.

152. $y = x$.

153. $xy = 1$.

154. $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2} = 1$.

155. $y = \frac{x^3}{27}$.

156. $y = \pm 2e^{\frac{1}{2}x}$.

157. $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$.

158. $y = \frac{x^4}{16}$.

159. $y^2 \pm 2ax = 0$.

160. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 + C_2x$.

161. $y = \frac{1}{12}(x - C_1)^3 + C_2$.

162. $y = (1 + C_1^2)\log(x + C_1) - C_1x + C_2$.

163. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$. **164.** $y = C_1e^{\frac{x}{a}} + C_2x + C_3$.

165. $x - C_1 = a\log\sin\frac{y - C_2}{a}$.

166. $y = (x + C)\log(x + C) + C_1x + C_2$.

167. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2x + C_3$.

163. $x^3 + y^2 + Cx + C_1y + C_2 = 0$.

169. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$. 170. $y = C_1(3x + C_2)^{2/3}$.

171. $x - C_1 = \frac{1}{C_2^2}(C_2y^{\frac{2}{3}} + 2)\sqrt{C_2y^{\frac{2}{3}} - 1}$.

172. $y = 2a - C_1 \sin^2 t$; $x = C_2 + C_1\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$.

173. $x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}}\log\frac{\sqrt{C_1 + ae^y} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{C_1 + ae^y} + \sqrt{C_1}}$.

174. $x = \frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$.

175. $y = C_1e^{C_2x}$. 176. $(x + C)^2 - y^2 = C_1^2$.

177. $y\cos^2(x + C_1) = C_2$. 178. $(x - C_1)^2 = 4C(y - C)$

179. $(C_1y - 1)^{3/2} = \frac{3}{2}C_1x + C_2$. 180. $y = \frac{C_1 + x}{C_2 + x}$.

181. $x = C_1 + C_2\log(y + \sqrt{y^2 + 1 - C_1^2}) + \log(y - C_1\sqrt{y^2 + 1 - C_1^2})$.

182. $y = C_1 + C_2e^{C_1x}$. 183. $y^2 + x^2 = 2x$.

184. $y = 1 - \left(\frac{3}{4}x\right)^{4/3}$.

185. При знаке $+$: $y = a + \frac{1}{k}\log\left(\frac{e^{\varepsilon x} + e^{-\varepsilon x}}{2} + \frac{c}{\sqrt{\frac{g}{k}}}\cdot\frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2}\right)$.

При знаке $-$: $y = a - \frac{1}{k}\log\left(\cos\varepsilon x + \frac{c}{\sqrt{\frac{g}{k}}}\sin\varepsilon x\right)$; $\varepsilon = \sqrt{kg}$.

186. $y = a[\cos(nx\sqrt{1 - k})]^{\frac{1}{1-n}}$.

187. $(y - C_1e^x - C_2e^{-x} + x)(y - C_1\cos x - C_2\sin x + x) = 0$

188. $y = x\left(C_1 - \arcsin\frac{C_2}{x}\right)$. 189. $y = x\log\left(\frac{C_2x}{1 + C_1x}\right)$.

190. $y^2 = C_1 + C_2(x^2 + x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2}))$.

191. $y = x^2\{1 + C_1\,tg(C_1\log C_2x)\}$.

192. $y = \frac{C_1x}{C_2 + x^2}$. 193. $y = C_1xe^{\frac{C_2}{x}}$.

194. $y = C_1e^{\frac{C_2}{2x} + \frac{x}{2C_2}}$.

195. $z = C_2(x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2) + C_1\log(x^2 + y^2) - C_2(x^2 - y^2) + C_3$.

196. $\varphi = C\log[x^2 + y^2 - 2C^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - 2C^2)^2 - 4C^4}] + C_1$.

197. $y = C_1\log x + C_2$. 198. $y = Cx + \frac{Cx^3}{3} + C_1$.

199. $y = \frac{2}{3}Cx^{3/2} - \frac{mx^2}{2} + C_1$. 200. $y = \frac{3x^2}{4} + x + C_1\log x + C_2$.

201. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{x} + C_3e^{-3x}$.

202. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3x^2e^{-2x} + C_4e^x + C_5e^{4x}$.

203. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3\sin x + C_4x\sin x + C_5\cos x + C_6x\cos x$.

204. $y = e^{-x}(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1})$.

205. I. n — четное: $y=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left[A_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)+\right.$

$$\left.+B_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)\right]e^{x\cos\frac{2k\pi}{n+1}}.$$

II. n — нечетное: $y=Ce^{-x}+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[A_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)+\right.$

$$\left.+B_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)\right]e^{x\cos\frac{2k\pi}{n+1}}.$$

206. I. n — нечетное: $y=Ce^{ax}+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}e^{ax\cos\frac{2k\pi}{n}}\left[A_k\cos\left(ax\sin\frac{2k\pi}{n}\right)+\right.$

$$\left.+B_k\sin\left(ax\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

II. n — четное: $y=Ce^{ax}+C_1e^{-ax}+$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}e^{ax\cos\frac{2k\pi}{n}}\left[A_k\cos\left(ax\sin\frac{2k\pi}{n}\right)+B_k\sin\left(ax\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

207. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left\{(C_1+C_2x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+(C_3+C_4x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right\}+x^2-3x+1.$

208. $y=e^{3x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{x}.$

209. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4.$

210. $y=\frac{e^x}{a^2+1}+C_1\cos ax+C_2\sin ax.$

211. $y=(C_1+C_2x-3x^2+2x^3)e^{2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$

212. $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x+C_4x^2-2x^3+x^4)e^x.$

213. $y=C_1e^x+(C_2+x)e^{2x}+(C_3+21x-9x^2+2x^3)e^{3x}.$

214. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}.$

215. $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\frac{x^2}{a^2}\cos ax.$

216. $y=(C_1-\sin ax)e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax.$

217. $y=(C_1+C_2x+4x\sin x-(x^2-6)\cos x)e^{-x}.$

218. $y=C_1e^x+C_2xe^x+2x^2e^x+\frac{3\sin x+4\cos x}{25}e^{-x}.$

219. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x\sin x+\frac{1}{16}\cos 3x.$

220. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+\cos 2x\{C_3+0{,}0187x-0{,}02x^2\}+$

$$+\sin 2x\{C_4+0{,}0084x-0{,}015x^2\}.$$

221. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}.$

222. $y=\frac{a+ky_0}{2k}e^{k(x-x_0)}+\frac{ky_0-a}{2k}e^{-k(x-x_0)}.$

223. $y=y_0\cos k(x-x_0)+\frac{a}{k}\sin k(x-x_0).$

224. $$\begin{cases} y = e^{-hx}\left(a\cos\sqrt{n^2-h^2}\,x + \dfrac{c+ah}{\sqrt{n^2-h^2}}\sin\sqrt{n^2-h^2}\,x\right), \text{ если } h < n; \\ y = e^{-hx}\left((c+ah)x + a\right), \text{ если } h = n; \\ y = \dfrac{c+a(h+\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}\, e^{(-h+\sqrt{h^2-n^2})x} - \\ \quad - \dfrac{c+a(h-\sqrt{h^2-n^2})}{2\sqrt{h^2-n^2}}\, e^{-(h+\sqrt{h^2-n^2})x}, \text{ если } h > n. \end{cases}$$

225. $y = a\cos nx + \dfrac{c(n^2-p^2)-hp}{n(n^2-p^2)}\sin nx + \dfrac{h}{n^2-p^2}\sin px.$

226. $y = \dfrac{7}{2}e^{-x} + e^x\left(2x^3 - 4x^2 + 5x - \dfrac{11}{2}\right) + 3(x+1).$

227. $y = \pi\sin^2\dfrac{x}{2} - \sin x + x\cos x.$

228. Все значения ρ. $y = \begin{cases} C(x - {}^1/_2) \text{ при } \rho = 0, \\ C(e^{-\rho x} - e^{-\rho + \rho x}) \text{ при } \rho \neq 0. \end{cases}$

229. $\rho = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. $y = \begin{cases} C(3x-1) \text{ при } k = 0, \\ C\sin 2k\pi x \text{ при } k \neq 0. \end{cases}$

230. $y = C + C_1\log x + C_2x^3.$ **231.** $y = x\,(C_1 + C_2\log x + C_3(\log x)^2).$

232. $y = C_1 x^{\frac{3-\sqrt{\sqrt{32}+5}}{2}} + C_2 x^{\frac{3+\sqrt{\sqrt{32}+5}}{2}} +$
$+ x^{3/2}\left\{C_3\cos\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{32}-5}}{2}\log x\right) + C_4\sin\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{32}-5}}{2}\log x\right)\right\}.$

233. $y = \dfrac{1}{2}x + C_1\cos(\log x) + C_2\sin(\log x).$

234. $y = x(C_1 + C_2\log x + \log^2 x).$

235. $y = x\log x + C_1x + C_2x^2 + x^3.$

236. $y = x(C_1 + C_2\log x) + C_3x^2 + \dfrac{x^3}{4}\quad \dfrac{3}{2}x(\log x)^2.$

237. $y = C_1 - 3x + C_2(3x+2)^{\frac{4}{3}} + 5\log(3x+2).$

238. $x = C_1x^2 + C_2x^3 + \dfrac{1}{2}ax + \dfrac{1}{12}\dfrac{b}{x}.$

239. $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3x\log x + \dfrac{C_4}{x}\log x + \dfrac{x^2}{9}.$

240. $y = \dfrac{C_1 + C_2\log x + \log^3 x}{x}.$ **241.** $y = \dfrac{2\log^2 x + \log x + C_1 + C_2x^4}{x}.$

242. $y = C_1\cos\log(1+x) + C_2\sin\log(1+x)\quad \log(1+x)\cos\log(1+x).$

243. Все значения ρ, кроме $\rho = -2, -3, 3, 4$.

244. $y = x^{-n}(C_1e^{hx} + C_2e^{-hx}).$

245. $$\begin{cases} y = e^{nx^2}[C_1\cos x\sqrt{2(n+a)} + C_2\sin x\sqrt{2(n+a)}], \text{ если } n+a > 0; \\ y = e^{nx^2}(C_1 + C_2x), \text{ если } n+a = 0; \\ y = e^{nx^2}[C_1e^{x\sqrt{-2(n+a)}} + C_2e^{-x\sqrt{-2(n+a)}}], \text{ если } n+a < 0. \end{cases}$$

246. $y = C_1e^{\sqrt{x}} + C_2e^{2\sqrt{x}}.$ **247.** $y = C_1\cos e^x + C_2\sin e^x.$

248. $y = C_1\cos\dfrac{n}{x} + C_2\sin\dfrac{n}{x}.$ **249.** $y = \dfrac{C_1 + C_2x}{\sqrt{1+x^2}}.$

250. $y = C_1\cos(n\arcsin x) + C_2\sin(n\arcsin x).$

251. $y=C_1\cos\left(\frac{m}{2}\ \mathrm{arctg}\ e^{2x}\right)+C_2\sin\left(\frac{m}{2}\ \mathrm{arctg}\,e^{2x}\right)$.

252. $y=C_1\cos(m\log\cos x)+C_2\sin(m\log\cos x)$.

253. $y=(C_1+C_2e^x)\,e^{(e^x)}$.

254. $x=C_1\cos y+C_2\sin y+\frac{1}{2}e^y$.

255. $xy=C_1\cos x+C_2\sin x$. **256.** $y=C_1e^x+C_2x^2$.

257. $y=C_1\log x+C_2x$. **258.** $y=C_1(1+x)+C_2e^x$.

259. $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x$.

260. $y=C_1\sin^4 x+C_2\frac{\cos x}{\sin^3 x}\left(\sin^4 x+\frac{3}{5}\sin^2 x\cos^4 x+\frac{1}{7}\cos^6 x\right)$.

261. $y=C_1\frac{x}{1-x}+C_2\left(x+1+\frac{2x\log x}{1-x}\right)$.

262. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{\frac{x^2}{2}}$.

263. $y_1=C_1(x+\sqrt{x^2+1})^n+C_2(x-\sqrt{x^2+1})^n$.

264. $y=\pi-1+4\,\mathrm{arctg}\,x+x^2$. **265.** $y=C_1e^{2x}+C_2(4x^2+1)$.

266. $y=C_1(4x^3-3x)+C_2\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)$.

267. $y=C_1e^x(x^2-8x+20)+C_2(x^3+9x^2+36x+60)$.

268. $y=C_1(x^3-x)+C_2\left[3x^2-2-\frac{3}{2}(x^3-x)\log\frac{x+1}{x-1}\right]$.

269. $y=C(3x^2-1)+C_1\left(6x-(3x^2-1)\log\frac{1+x}{1-x}\right)$.

270. $y=C_1(2x^2-1)+C_2\left[(2x^2-1)\int e^{x^2}dx-xe^{x^2}\right]$.

271. $\mu=12$; $y=C\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)$.

272. Функции p и q связаны соотношением $\frac{dq}{dx}=2pq$. Когда $p=\frac{1}{x}$, $q=4ax^2$ и $y=C_1e^{x^2\sqrt{a}}+C_2e^{-x^2\sqrt{a}}$, если $a>0$; $y=C_1\cos(x^2\sqrt{-a})+C_2\sin(x^2\sqrt{-a})$, если $a<0$.

273. Независимые частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут

$$y_1(x)=\sqrt{x(1-x)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{\sqrt{1-4\beta}}{2}};\ \sqrt{x(1-x)}\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta-1}}{2}\log\frac{x}{1-x}\right);\ \sqrt{x(1-x)},$$

$$y_2(x)=\sqrt{x(1-x)}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{\sqrt{1-4\beta}}{2}};\ \sqrt{x(1-x)}\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta-1}}{2}\log\frac{x}{1-x}\right);$$

$\sqrt{x(1-x)}\log\frac{x}{1-x}$, смотря по тому, будет ли $\beta <, >$ или $=\frac{1}{4}$.

274. При обозначениях зад. № 273 имеем:

$$y=\frac{\beta}{\Delta_0}\left[y_1(x)\int_0^x y_2(\xi)\,d\xi-y_2(x)\int_0^x y_1(\xi)\,d\xi\right],$$

где $\Delta_0=[y_1'(x)\,y_2(x)-y_2'(x)\,y_1(x)]_{x=0}$.

275. $x^2+y^2=C_1$; $p^2+q^2=C_2$; $py-qx=C_3$.

276. $\frac{z}{y}=C_1$; $\frac{(x^2+y^2)\,y}{x^3}=C_2$.

277. $y = \frac{C_1}{2}\sqrt{\frac{C_2 - 2x}{C_2 + 2x}}$; $z = \frac{C_1}{2}\sqrt{\frac{C_2 + 2x}{C_2 - 2x}}$.

278. $\log\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_1$; $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2$.

279. $(y - x)z = C_1$; $(y - x)e^{z(y+x)} = C_2$.

280. $x + y + z = C_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

281. $\frac{x}{y} = C_1$; $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2$.

282. $x^2 + y^2 = C_1$; $(x + y)(x + y + z) = C_2$.

283. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1 y$; $z = C_2 y$.

284. $x - y = C_1$; $z - t(x - y + 1) = C_2$; $y - \log(z - t) = C_3$.

285. $z = x - y$; $y(y - 2x)^3 = (x - y)^2$.

286. $$\begin{cases} x = s\sin\alpha + \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha; \\ y = -s\cos\alpha + \frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha; \\ s = e^{\frac{\alpha}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right). \end{cases}$$

287. $$\begin{cases} y = (C_1 + C_2 - C_1 x)e^{-2x}. \\ z = (C_1 - C_2)e^{-2x}. \end{cases}$$

288. $$\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t). \\ y = e^{-6t}((C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t). \end{cases}$$

289. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$; $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}$; $z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$.

290. $x = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_3 e^{2t}$; $y = C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t}$; $z = C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}$.

291. $$\begin{cases} y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]; \\ z = \frac{1}{7}e^{-\frac{x}{2}}\left[(\sqrt{3}C_2 - 2C_1)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3}C_1 + 2C_2)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]. \end{cases}$$

292. $$\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t;\ y = C_3 e^{t} + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\cos t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\sin t; \\ z = C_3 e^{t} + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\cos t - \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\sin t. \end{cases}$$

293. Параметрическое представление интеграла

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 C_3 e^{\alpha_2 t}, \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{\alpha_1 t} + C_3 e^{\alpha_2 t}, \\ z = C_1 e^{t} + \alpha_1 C_2 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_3 e^{\alpha_2 t}, \end{cases}$$

α_2 — корни уравнения $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

294. $$\begin{cases} x = C_1 + C_2\cos(t\sqrt{5}) + C_3\sin(t\sqrt{5}); \\ y = 2C_1 - \frac{1}{2}(C_2 - C_3\sqrt{5})\cos(t\sqrt{5}) - \frac{1}{2}(C_3 + C_2\sqrt{5})\sin(t\sqrt{5}); \\ z = 2C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3\sqrt{5})\cos(t\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(C_3 - C_2\sqrt{5})\sin(t\sqrt{5}). \end{cases}$$

295. $$\begin{cases} x = e^{mt}(C_1\cos mt + C_2\sin mt) + e^{-mt}(C_3\cos mt + C_4\sin mt); \\ y = \frac{1}{2}e^{mt}(C_1\sin mt - C_2\cos mt) + \frac{1}{2}e^{-mt}(C_4\cos mt - C_3\sin mt). \end{cases}$$

296. $\begin{cases} x = \frac{3}{4}(a-b)(1-\cos 2ct); \\ y = \frac{3}{4}(a-b) + b\cos ct + \frac{a-b}{4}\cos 2ct; \\ z = b\cos ct. \end{cases}$

297. $\begin{cases} x = C_1 \sin(t+\delta_1) + C_3 \sin(2t+\delta_3), \\ y = C_2 \sin(t+\delta_2) + C_3 \sin(2t+\delta_3), \\ z = -\frac{1}{3} C_1 \sin(t+\delta_1) - C_2 \sin(t+\delta_2) - C_3 \sin(2t+\delta_3), \end{cases}$

где C_1, C_2, C_3, δ_1, δ_2, δ_3 — произвольные постоянные.

298. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t, \\ y = C_4e^t + C_5te^t + C_3t^2e^t, \\ z = C_6e^t - (2C_3 - C_5)te^t - C_3t^2e^t. \end{cases}$

299. $\begin{cases} y = 23 - 2(C_1 + C_2 + C_2x)e^x - 2(C_1 - C_3 + C_3x)e^{-x}; \\ z = 18 + (C_1 + C_2x)e^x + (C_1 + C_3x)e^{-x}. \end{cases}$

300. $\begin{cases} x = (0,5t + C_1)e^t + (-0,5t + C_2)e^{-t}; \\ y = (0,5t + C_1 + 0,5)e^t + (0,5t - C_2 - 0,5)e^{-t}. \end{cases}$

301. $\begin{cases} x = 2C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{27}e^{2t}; \\ y = C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} - \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t}. \end{cases}$

302. $\begin{cases} y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{3e^{ax}}{a^2-4}; \\ z = C_1e^{2x} - \frac{1}{3}C_2e^{-2x} + \frac{(a+1)e^{ax}}{a^2-4}. \end{cases}$

303. $\begin{cases} x = C_1(1+2t) - 2C_2 - 2\cos t - 3\sin t, \\ y = -C_1t + C_2 + 2\sin t. \end{cases}$

304. $\begin{cases} y = \frac{1}{8}e^x + (1 - 2C_1 + 3C_2 - 2C_3x)e^{-x}, \\ z = \left(\frac{3}{8}x + C_3\right)e^x + (C_1 + C_3x)e^{-x}. \end{cases}$

305. $y = \frac{1}{2}e^x + e^{-x}, \ z = -\frac{3}{4}e^x + C_1e^{-x}.$

306. $\begin{cases} y = -\frac{x^2}{2} + Ce^{2x} + C_1e^{-3x}, \\ z = x^2 + x - Ce^{2x} + 4C_1e^{-3x}. \end{cases}$

307. $\begin{cases} y = \frac{2cx}{3a^2} + \frac{b}{3a^2} - \frac{10c}{9a^3} + C_1e^{-ax} + C_2xe^{-ax} + C_4e^{3ax}, \\ z = \frac{cx}{3a^2} + \frac{2b}{3a^2} - \frac{8c}{9a^3} + C_3e^{-ax} + C_2xe^{-ax} + C_4e^{3ax}. \end{cases}$

308. $\begin{cases} y = C_3 + C_4x^2 - x + \left(\frac{3}{2}C_2 + C_1 - 1\right)\log\sqrt{x} + \frac{C_2}{4}(\log x)^2; \\ y + z = C_1 + C_2\log x \end{cases}$

309. $\begin{cases} x = C_1e^{n^2t} + C_2e^{-n^2t} + \frac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nt, \\ y = -C_1e^{n^2t} + C_2e^{-n^2t} + \frac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nt. \end{cases}$

310. $\begin{cases} y = x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1x^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2x^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \\ z = C_1x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + C_2x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}. \end{cases}$

311. $\begin{cases} y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} - \dfrac{x^2}{18}\{3(\log x)^2 - 2\log x\}, \\ z = 1 - 2C_1 x + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{x}{9}\{3(\log x)^2 + \log x - 1\}. \end{cases}$

312. $\begin{cases} x = \dfrac{C_1 \cos t + C_2 \sin t}{t}, \\ y = \dfrac{C_3 + 2C_2 \cos t - 2C_1 \sin t}{t^2} + \dfrac{C_1 \cos t + C_2 \sin t}{t}. \end{cases}$

313. $x + y = C_1 e^t;\ x = \frac{1}{3} t + \frac{C_2}{t^2}$.

314. $z = \sin y + \Phi(\sin x - \sin y)$.

315. $4xyz = -x^4 - 2x^2 + \Phi(xy)$.

316. $z^2 = xy + \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

317. $xyz = \frac{1}{3} y^3 + \Phi(xy)$.

318. $x - y + \sqrt{R^2 - z^2} = \Phi(z)$.

319. $z = xy + x\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

320. $\log z = \Phi(xy) - \frac{xa}{3y^2}$.

321. $z = a \sin\left[xy + \Phi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$.

322. $z = y\Phi(x^2 - y^2)$.

323. $z = \frac{y^2\Phi(y) + xy}{y - x\Phi(y)}$.

324. $4z^5 = 5x^2y^2 + \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

325. $x^{a-1}\left(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

326. $z = x\Phi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$.

327. $x^2 + y^2 + z^2 = y\Phi\left(\frac{z}{y}\right)$.

328. $x^3y^3z = \Phi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2y^2}\right)$.

329. $z = y\Phi\left(\frac{y^3 + x^2y}{x^2}\right)$.

330. $z = e^y \Phi(ye^{2y^2})$.

331. $z = \sqrt{x^2 + y^2}\ \Phi\left(\log\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$.

332. $\Phi\left(\frac{z}{x + y + z} + \log(x + y + z),\ y + z\right) = 0$.

333. $\Phi[(x - y)(x + y + 2z),\ (x + y + 2z)(x + y - z)^2] = 0$.

334. $\Phi(y - ze^{-x},\ x + ze^{-y}) = 0$.

335. $\Phi\left(x(y - z),\ x(y - u),\ \frac{y + z + u}{x^2}\right) = 0$.

336. $u = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3(y + z)}{6} + \frac{x^2yz}{2} + \Phi(y - x,\ z - x)$.

337. $u = \frac{xy}{z}\log x + x\Phi\left(\frac{x}{y},\ \frac{x}{z}\right)$.

338. $u = x^2 \log x + x^2 \Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)$.

339. $u = \Phi\left(yz - \frac{ax}{2}(y + \sqrt{1 - y^2}),\ xe^{\arcsin y}\right)$.

340. $\Phi[(x - u)\sqrt[3]{x + y + z + u},\ (y - u)\sqrt[3]{x + y + z + u},\ (z - u)\sqrt[3]{x + y + z + u}] = 0$.

341. $z^2 + xy = h^2 + c^2$.

342. $xyz - \frac{x^2}{2} = 1$.

343. $z^2 = x^2 - y^2$.

344. $z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^4$.

345. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2R^2(x^2 + y^2 + xy)$.

345. $z = \operatorname{tg}\frac{y}{2}\left\{\frac{4\sin^2 x}{\sin^2 y} - 1\right\}$.

347. $(x^2 + y^2)(R^2z^2 - c^2y^2) = cR^2x^2z$.

348. $xy = C$; $y = Cx$.

349. 1. $x^2 + y^2 = Cy$. 2. $y^2 = C^2 - 2Cx$. 3. $xy = C$.

350. $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$. **351.** $x^2 + y^2 = Ce^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.

352. $y^2 = a^2 - Ce^{\frac{x}{a}}$. **353.** $e^{ay} + C = a^2x^2 - 1$.

354. Цепная линия.

355. Если $\frac{mT}{OP} = k$, то $kx^2 + (k-1)y^2 = C$

356. $x + C = a \log(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) + \sqrt{a^2 - y^2}$.

357. $2x + C_1 = C \log y - \frac{y^2}{2C}$.

358. За ось ординат взята данная прямая, ось абсцисс проведена через данную точку, абсцисса которой пусть будет a. Уравнение искомой кривой:

$Cx = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\, e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}}$.

359. $x \pm \sqrt{a^2 - y^2} + C = \log(a + \sqrt{a^2 - y^2})$.

360. $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C - c^2} = 1$.

361. Единственная *кривая*, удовлетворяющая условию, будет: $y^3 = \frac{27}{4} a^2 x$, если a^2 — данная площадь.

362. $x = \frac{a \cos^2 t}{\sqrt{C - t}}$, $y = \frac{a(2C - 2t + \sin t \cos t)}{\sqrt{C - t}}$.

363. $y^2 = 4C(a - x) + 4C^2$.

364. $2a(x + C) = y\sqrt{y^2 - a^2} - a^2 \log \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}$.

365. $x = Cy + \frac{a^2}{y}$ (a^2 — данная площадь).

366. $x - x_0 = \pm \frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$; $y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi)$.

367. 1) $y = Cx^2 + \frac{2}{3}\frac{a^2}{x}$; 2) $y = \frac{x^2}{3a} + \frac{2a^2}{3x}$.

368. $y = Cx^2$.

369. Концентрические окружности с центром на прямой, соединяющей данные точки

370. Эллипсы и гиперболы.

371. $x = \sin t\left(a - C - \frac{1}{2} a \sin^2 t\right)$; $y = \cos t\left(C - \frac{1}{2} a \sin^2 t\right)$.

372. $y^2 - xy + 2x^2 = C \cdot e^{\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y - x}{x\sqrt{7}}\right)}$.

373. Астроиды.

374. Параметрическое представление радиуса-вектора и полярного угла искомой кривой:

$\rho = \frac{2a}{\sqrt{\sin 2\omega}}$, $\theta = C - \omega - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\omega$.

375. Параметрическое представление радиуса-вектора и полярного угла $\rho = 2a \cos\omega$, $\theta = C + \omega - \operatorname{tg}\omega$.

376. Параметрическое представление радиуса-вектора и полярного угла:

$\rho = \frac{a}{2\cos\omega}$, $\theta = C + \operatorname{tg}\omega - \omega$.

377. $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. **378.** $y=\frac{b}{2}\left[e^{\frac{x-C}{b}}+e^{-\frac{x-C}{b}}\right]$.

379. Обозначив отношение через $\frac{1}{b}$, находим:
$x=\frac{b}{4}\frac{t^2+1}{t}$; $y=-\frac{b}{16}\frac{t^4-1}{t^2}+\frac{b}{4}\log t$.

380. $x+C=\int\sqrt{f'^2(y)-1}\,dy$.
Частные случаи. 1) циклоида; 2) цепная линия;
3. $x-C=\sqrt{a^2-y^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$ (развертка цепной линии).

381. $y^2=C(C-2x)$.

382. Если $2p$ параметр парабол и данная прямая взята за ось y, то уравнение траэкторий будет: $y+C=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{3/2}$.

383. $x^2+y^2=2a^2\log Cx$.

384. Гиперболы, однофокусные с эллипсами.

385. Эвольвента астроиды: $x=C\cos t+\frac{1}{2}a\sin^2t\cos t$;
$y=(a-C)\sin t+\frac{1}{2}a\sin^3t$.

386. Данная прямая взята за ось абсцисс:
$x+C=a\left(\cos t+\log tg\frac{t}{2}\right)$; $y=a\sin t$.

387. $(x^2+y^2)^2=Cxy$. **388.** $y^2=Ce^{\frac{x}{p}}-2px+2p^2$.

389. Если за оси координат взять биссектрисы углов между данными прямыми, то параметрическое уравнение траекторий будет:
$x=C(1\pm\sin\theta\cos t)\left(tg\frac{t}{2}\right)^{\pm\sin\theta}$; $y=\pm C\sin\theta\sin t\left(tg\frac{t}{2}\right)^{\pm\sin\theta}$.

390. Параметрическое представление радиуса-вектора и полярного угла для искомой кривой: $r=2R\cos t$, $\theta=t-tgt+C$.

391. $(x^2+y^2)^2-C(x^2-y^2)=0$.

392. $(x^2+y^2)^2-C(2x^2+y^2)=0$.

393. $x=\frac{C}{cht}+a(t-tht)$. $y=Ctht+\frac{a}{cht}$.

394. $x=C\sin t+a(\cos t+t\sin t)$; $y=-C\cos t+a(\sin t-t\cos t)$.

395. $x=a(\cos t+t\sin t)+\cos t\left(\frac{at^2}{2}+c\right)$;
$y=a(\sin t-t\cos t)+\sin t\left(\frac{at^2}{2}+c\right)$.

393. $\rho=C[1+\cos(\theta-2\alpha)]$. **397.** $\rho=C\cos(\theta-\alpha)$.

398. $x=Ce^{\varphi}(\sin\varphi+\cos\varphi)-R\sqrt{2}\sin\varphi$;
$y=Ce^{\varphi}(\sin\varphi-\cos\varphi)+R\sqrt{2}\cos\varphi$.

399 $e^{ay+C_2}=\sec(ax+C_1)$.

400. Если уравнения данных прямых $y=0$ и $y=h$, то уравнение искомой кривой $y+h\log\cos\frac{x+C_1}{h}=C_2$.

401. $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$.

402. Логарифмическая спираль. **403.** Развертка круга.

404. Циклоида. **405.** Круг.

406. Развертка круга. **407.** Логарифмическая спираль.
408. Циклоида. **409.** Цепная линия.
410. Логарифмическая спираль. **411.** Циклоида.
412. Развертка круга.

413. $\rho = \frac{C_0}{\cos^2 t}$; $\theta = C_1 - 2t + tg\, t$.

414. Параметрическое представление радиуса-вектора и полярного угла искомой кривой
$$\begin{cases} \rho = \frac{C}{\sqrt{1-\sin\omega\cos\omega}}\, e^{\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\, tg\,\omega - 1}{\sqrt{3}}}, \\ \theta = C_1 - \omega - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\, tg\,\omega - 1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

415. Кривая в точке M_0 необходимо касается линии OM_0. Если взять эту линию за ось абсцисс, перпендикуляр к ней из O за ось ординат, то параметрическое представление кривой будет $x = \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha + s\sin\alpha$,

$y = \frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha - s\cos\alpha$, $s = Ce^{\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$.

416. $x^2 + y^2 + z^2 = \Phi\left(arctg\frac{y}{x} \pm \log\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

417. $z^2 = \pm 4a^2\, arctg\frac{x}{y} + \Phi(x^2+y^2)$.

418. $x^2 + y^2 + z^2 = x\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

419. $\Phi(x^2 - y^2,\ 2x^2 - z^2) = 0$. **420.** $\Phi(x^2 - y^2,\ x^2 - z^2) = 0$.

421. $z(x^2 + y^2 + z^2) = h(z^2 + 2y^2)$.

422. $x^2 + y^2 + 2z^2 = R^2 + 2c^2$.

ОТДЕЛ VII

1. $\frac{\pi}{4}$.

2. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. $\frac{\pi - 1}{4}$.

4. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5. $\frac{\pi}{3}$.

6. $\frac{\pi}{2}$, если $0 < \alpha < \pi$.

$-\frac{\pi}{2}$, если $-\pi < \alpha < 0$.

7. $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$.

8. $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.

9. $\frac{\pi}{2}\,\frac{1+a^2}{1-a^2}$.

10. $\frac{1}{\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

11. $\frac{\pi}{2a^{2n-1}}\,\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n-2)}$.

12. $\frac{(-1)^n.1.2.3\dots n}{(m+1)^{n+1}}$.

13. $\frac{1.2.3\dots n}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}$.

14. $\frac{1.2.3\dots n}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4}$.

15. $\frac{\pi}{2^{n+2k+1}}\,\frac{(n+2k)(n+2k-1)\dots(n+k+1)}{1.2.3\dots k}$.

16. $\frac{1}{m+1}$.

17. $\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{2^2}{3}+\dots+\frac{2^{m-1}}{m}\right)$.

18. 1. Если m и n разной четности, то $J=0$.
2. Если m и n одинаковой четности, то $J=0$ при $n>m$ и

$J=\frac{\pi}{2^{m-1}}C_m^{\frac{m-n}{2}}$ при $n \leq m$.

19. $J=0$ при m четном и $J=\pi$ при m нечетном.

20. $\frac{1.2.3\dots(2n+1)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)\dots[a^2+(2n+1)^2]}$.

21. $\frac{1.2.3\dots 2n}{(m^2+2^2)(m^2+4^2)\dots(m^2+4n^2)}\,\frac{2\operatorname{sh}\frac{m\pi}{2}}{m}$.

22. $\frac{\pi a^m}{1-a^2}$ при $a<1$.

23. $\frac{\pi}{2}a^{m-1}$ при $a<1$.

24. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$.

25. $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$.

26. $\frac{\pi}{2(1-\alpha\beta)}$ при $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$.

27. $\frac{\pi}{\alpha}\log(1+\alpha)$ при $\alpha<1$.

28. $\frac{\pi}{2(1-\alpha^2)}\frac{1-\alpha e^{-m}}{1+\alpha e^{-m}}$ при $\alpha^2<1$.

29. $\frac{\pi}{2(\alpha+e^m)}$ при $\alpha^2<1$.

30. При $\alpha<1$: 0.
При $\alpha>1$: $\pi\log\alpha^2$.

31. 1) $a^2<1$: $J=-\frac{\pi a^k}{k}$; 2) $a^2>1$. $J=-\frac{\pi}{ka^k}$.

32. $\pi\log\left(1-\frac{a}{e}\right)$.

33. $\frac{\pi\alpha}{2(1-\alpha^2)}$.

34. $-\frac{\pi^2}{8}$.

35. $\frac{\pi^2}{4}$.

36. $\frac{\pi}{8}\log 2$.

37. $-\frac{\pi}{2}\log 2$.

38. $\frac{\pi^2}{4}$.

39. $\frac{\pi^2}{2}\log 2$.

40. $\frac{\pi}{2}\left\{(\log 2)^2+\frac{\pi^2}{12}\right\}$.

41. 1) $\frac{\pi^2}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2m}$; 2) $\pi\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2m}{3\cdot5\cdot7\ldots(2m+1)}$.

42. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}$.

43. $\pi\log\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

44. $-(\arcsin\alpha)^2$.

45. $2\pi\left\{a\log\left(1+\frac{b}{a}\right)+b\log\left(1+\frac{a}{b}\right)\right\}$.

46. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha\log(1+\alpha^2)$.

47. $\log(1+a)$.

48. $\pi\log\frac{a+b}{2}$.

49. $\sqrt{\pi}(b-a)$.

50. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{k}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k}$.

51. $\frac{\pi}{2}\beta-\pi\sqrt{\alpha}$.

52. $b\operatorname{arctg}\frac{2b}{a}-\frac{a}{4}\log\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right)$.

55. $\log 2$.

56. $\frac{\pi}{4}$.

57. Каждый из интегралов равен $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

58. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

59. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

60. $\frac{\pi}{2\sin n\pi}$.

61. $-\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

62. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

63. $\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$.

64. $\frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

65. $\frac{\pi}{a^{1-\alpha}(1+a)^{\alpha}\sin\pi\alpha}$.

66. $\frac{2^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\Gamma(n)}$.

67. $\frac{B(l,m)}{2a^l b^m}$.

68. $\pi \, cotg \, \pi a$. Находится на основании интеграла

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1).$$

Сравн. задачу № 70.

69. $\pi \log \dfrac{tg \frac{\alpha}{2}}{tg \frac{\beta\pi}{2}}$.

70. $\dfrac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$.

71. $\dfrac{\pi a}{\sin a\pi}$.

72. π.

73. $\pi \log 2$.

75. $\log \dfrac{b}{a}$.

76. $\dfrac{1}{2} \log \left|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$.

77. $\dfrac{\pi}{2} \log \dfrac{a}{b}$.

ОТДЕЛ VIII.

1. Ряд сходящийся при $x > 1$ и расходящийся при $x \leq 1$.

2. Ряд сходящийся при x неравном ± 1; расходящийся при $x = \pm 1$.

3. Ряд сходится при всяком x.

4. Ряд сходится при $x < 1$ и $x > 1$; расходится при $x = 1$.

5. При $|x| < 4$ ряд сходящийся, при $|x| \geqq 4$ расходящийся.

6. Ряд сходящийся при $|x| < e$ и расходящийся при $|x| \geqq e$.

7. Ряд абсолютно сходящийся при $|x| < \frac{1}{e}$, расходящийся при $|x| > \frac{1}{e}$. При $x = \frac{1}{e}$ ряд расходящийся; при $x = -\frac{1}{e}$ — сходящийся.

8. При $|x| < 1$ ряд абсолютно сходящийся. При $x = +1$ ряд сходящийся, когда $\gamma > \alpha + \beta$. Наконец, при $x = -1$ ряд сходящийся, когда $\gamma > \alpha + \beta - 1$.

9. Ряд сходящийся при $x > 1$, расходящийся при $x \leq 1$.

10. Ряд сходящийся при $b > a + 2$, расходящийся при $b \leq a + 2$.

11. Ряд сходящийся при $b > a \geqq 0$; расходящийся при $a \geqq b \geqq 0$.

12. Ряд сходящийся. **13.** Ряд расходящийся.

14. При $\alpha > 2$ ряд сходящийся, при $\alpha \leq 2$ — расходящийся.

15. При $\alpha > \beta$ ряд сходящийся, при $\alpha \leq \beta$ — расходящийся.

16. Ряд сходящийся. **17.** Ряд сходящийся.

18. Ряд сходящийся. **19.** Ряд сходится при условии $2p > 1$.

20. Ряд сходящийся при $-1 \leqslant x < 1$.

21. Ряд сходится при $a = 2$. **22.** Ряд сходящийся.

23. Ряд сходящийся. **24.** Ряд сходящийся.

25. Ряд сходящийся.

26. Ряд сходящийся при $x < \frac{1}{e}$ и расходящийся при $x \geqslant \frac{1}{e}$.

27. Ряд расходящийся. **28.** Ряд расходящийся.

29. $na + \frac{n(n-1)}{2} b + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3} c$.

30. $\frac{n(4n^2-1)}{3}$. **31.** $(n+1)(2n+1)(8n^2+12n+1)$

32. $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$. **33.** $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.

34. $\frac{n+1}{30}\{(n+1)^4 - 1\}$.

35. $-\frac{n^2(2n+3)}{3}$ при n четном, $\frac{2n^3+3n^2-1}{4}$ при n нечетном.

36. $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

37. $\dfrac{\sin nx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}-\dfrac{n\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

38. $\dfrac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

39. $\dfrac{\cos(n-1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}+\dfrac{n\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

40. $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

41. $S=-\dfrac{\sin nx\cos\frac{2n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$.

42. $S=n-\dfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}$.

43. $\dfrac{(-1)^{n-1}\sin^2 2nx-\{1+(-1)^{n-1}\}\sin^2 x}{2\cos 2x}$.

44. $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

45. $\dfrac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

46. $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

47. $\dfrac{x-7x^2-3x^3-x^4}{(1+x)^4}$.

48. $\dfrac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}$.

49. $\dfrac{1-z}{1-z-2z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+2(-1)^n}{3}z^n$.

Область сходимости: $-\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$.

50. $\dfrac{1-z}{1-5z+6z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2\cdot 3^n-2^n)z^n$.

Область сходимости: $-\frac{1}{3}<z<\frac{1}{3}$.

51. $\dfrac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{3}{4}n+\frac{9+(-1)^n}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right\}z^n$.

Область сходимости: $-1<z<+1$.

52. $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4}x^{n-1}$.

53. $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n+1)(n+5)}{12}+\frac{17}{72}+\right.$

$\left.+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}x^n$.

54. $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}$.

55. $\frac{1}{2}$.

55. $\frac{1}{3}$.

57. $\frac{11}{18}$.

58. $\frac{23}{90}$.

59. 1.

68. $\frac{5}{16}$.

61. $\frac{1}{8}$.

62. $\frac{5}{36}$.

63. $\frac{13}{120}$.

64. $\frac{73}{1080}$.

65. $\frac{1}{90}$.

66. $\frac{5}{36}$.

67. $S=\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$.

68. $S=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log 2\right)$.

69. $S=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi+2\log(\sqrt{2}+1)]$.

70. $S=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

71. $S=\log 2$.

72. $S=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$.

73. $S=\frac{5\pi}{12}$.

74. $S=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

75. $S=\frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{8}$.

76. $S=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^1 \frac{x^\alpha-x^\beta}{1-x}\,dx$.

77. $S=\frac{1}{4}$.

78. $S=\frac{\pi}{8}$.

79. $S=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

80. $S=\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{h}\right)$

81. $S=\log 4-1$.

82. $S=-\frac{5}{36}+\frac{2}{3}\log 2$.

83. $S=\frac{1}{8}$.

84. $S=\log 2-\frac{1}{2}$.

85. $S=\frac{1}{2}(1-\log 2)$.

86. $S=\frac{3}{4}-\log 2$.

87. $S=2-\frac{\pi^2}{6}$.

88. $S=\frac{\pi^2}{36}-\frac{2}{81}\log 2-\frac{25}{972}$.

89. $S=\frac{\pi^2-39}{16}$.

90. $S=\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{(1-x)^2}{2x^3}\log\frac{1}{1-x}$.

91. $S=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$.

92. $S=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

93. $S=\frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$.

94. $S=\frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$.

95. $S=\frac{1}{4}(e^z+e^{-z}+2\cos z)$.

96. $S=\frac{1}{3}\left(e^z+2e^{-\frac{1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$.

98. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$.

99. $|x|^3=\frac{\pi^3}{4}+\frac{3\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos 2jx}{j^2}-6\pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)x}{(2j-1)^2}+$
$+\frac{24}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)x}{(2j-1)^4}$. $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^4}{96}$, $\frac{\pi^4}{90}$.

100. $e^x = \frac{e^h - e^{-h}}{2h} - h(e^h - e^{-h}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos \frac{n\pi x}{h}}{h^2 + n^2\pi^2} +$

$+ \pi (e^h - e^{-h}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n \sin \frac{n\pi x}{h}}{h^2 + n^2\pi^2}.$

101. $\cos ax = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{a \cos x}{1^2 - a^2} - \frac{a \cos 2x}{2^2 - a^2} + \dots \right\}$

102. $\sin ax = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right\}$

103. $sh\, ax = \frac{2\, sh\, a\pi}{\pi} \left\{ \frac{\sin x}{a^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{a^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2 + 3^2} - \dots \right\}$

104. $ch\, ax = \frac{2\, sh\, a\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{a \cos x}{a^2 + 1^2} + \frac{a \cos 2x}{a^2 + 2^2} - \frac{a \cos 3x}{a^2 + 3^2} + \dots \right\}$

105. $\log \cos \frac{x}{2} = -\log 2 + \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots$

107. $S = \frac{11 \sqrt{2} \pi^4}{1536}$. **114.** $\frac{x(\pi - x)}{2}$.

115. Если $\varphi + \theta \leq \pi$, то $S = \frac{1}{4} \pi\varphi$, когда $\varphi \leqq \theta$, и $S = \frac{1}{4} \pi\theta$, когда $\varphi > \theta$.

Если же $\varphi + \theta > \pi$, то $S = \frac{1}{4} \pi (\pi - \theta)$, когда $\varphi \leqq \theta$, и $S = \frac{1}{4} \pi (\pi - \varphi)$, когда $\varphi > \theta$.

116. *A.* $0 < \varphi + \vartheta < \pi \begin{cases} S = 0 \text{ при } \vartheta > \varphi; \\ S = \frac{\pi}{8} \text{ при } \vartheta = \varphi; \\ S = \frac{\pi}{4} \text{ при } \vartheta < \varphi. \end{cases}$

B. $\pi < \varphi + \vartheta < 2\pi \begin{cases} S = \frac{\pi}{4} \text{ при } \vartheta > \varphi; \\ S = \frac{\pi}{8} \text{ при } \vartheta = \varphi; \\ S = 0 \text{ при } \vartheta < \varphi. \end{cases}$

117. Искомая сумма $= \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$. Если предположить $-\pi < x < +\pi$, то искомая сумма $= \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < \pi$ и $-\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ при $-\pi < x < 0$.

118. Искомая сумма $= -\frac{1}{2} \log\left(4 \sin^2 \frac{1}{2} x\right)$.

119. Искомая сумма $= \frac{\pi}{4}$ при $0 < x < \pi$.

120. Искомая сумма $= \frac{1}{4} \log \cot g^2 \frac{1}{2} x$.

121. $S = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \log \frac{1 + \sin x}{\cos x}$. **122.** $S = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log tg \frac{x}{2}$.

123. $S = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\pi - x}{2} \sin x; \quad S' = \sin x \left(\frac{1}{4} - \log 2 \sin \frac{1}{2} x \right)$.

ОТДЕЛ IX.

---

1. $2x-1$.

2. $2x-1-\frac{29}{13.11.10.5}(x-2)(x-4)(x-5)(x-10)$.

3. $2-\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}+9.\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}-$
$-28\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4}$.

4. $\overline{\Delta y_0}=0{,}471$; $\overline{\Delta^2 y_0}=-0{,}054$; $\overline{\Delta^3 y_0}=+0{,}006$.

5. $\overline{\Delta y_0}=0{,}0292$; $\overline{\Delta^2 y_0}=\quad 0{,}0568$; $\overline{\Delta^3 y_0}=\quad 0{,}0012$; $\overline{\Delta^4 y_0}=0{,}0048$.

6. $log\,1010=3{,}0043213689$; $\Delta\,log\,1010=0{,}000429781301$;
$\Delta^2\,log\,1010=-0{,}00000042489930$; $\Delta^3\,log\,1010=0{,}000000000838850$;
$\Delta^4\,log\,1010=-0{,}000000000002585$. В искомом логарифме ошибка менее $\frac{7}{10^{11}}$.

7. 3,002268462.

8. 3,002268651.

9. Найдя после первого приближения $x=1005{,}237$ и вычислив $\Delta\,log\,1005{,}237$ при $h=0{,}001$, после второго приближения получаем $x=1005{,}2374367$.

10. Взяв первое приближение по формуле $z=\frac{log\,x-log\,1005}{\Delta\,log\,1005}+$
$+\frac{z(z-1)\Delta^2\,log\,1005}{2\Delta\,log\,1005}$, с точностью до $\frac{1}{2.10^3}$ получаем $x=1005{,}237$.

11. 0,52373.

12. $u=0{,}50145$.

13. 0,66043862 до $\frac{1}{2.10^8}$.

14. 0,375147 до $\frac{1}{2.10^6}$.

15. $\varphi=28°9'57'',75$.

16. $\psi(0{,}715)=0{,}220378903$ до $\frac{1}{10^9}$.

17. $x=0{,}834350$.

18. 0,68797206 до $\frac{1}{2.10^8}$.

19. 0,935414 до $\frac{1}{2.10^6}$.

20. 0,22037890 до $\frac{1}{2.10^8}$.

21. 0,83467 в действительности 0,8356488.
22. 0,34636 » 0,3465736.
23. 0,16166 » 0,1622317.
24. 0,69315 » 0,6931472.
23. 0,78540 » 0,785396.
26. 0,83566 » 0,8356488.
27. 0,34657 » 0,34657359
23. 0,16223 » 0,1622317.

29. 0,141896 в действительности 0,141896.
30. 1,37079 » 1,37076.
31. 1,8519 » 1,851937.
32. 0,69314773 » 0,69314718.
33. 0,24433 » 0,243748.
34. 1,2288 » 1,22927.
35. 0,17260 » 0,17284.
36. 0,0099503309.
37. 0,5235.
38. 0,67353.
39. 0,69314716 в действительности 0,69314718.
40. 0,24383 » 0,243748.
41. 1,21871. **42.** 0,84897.
43. 1,2293 в действительности 1,22927.
44. 0,17281. **45.** 0,67375.
46. 1,3508 в действительности 1,350644.
47. 3,97746 » 3,9774638.
48. 156. **49.** $C = 0{,}57721566$.
50. 2,348. **51.** 14,3927267229.
52. $C = -1{,}460355$. **53.** $C = -0{,}073927$.
54. $s = \log 2\left(C - \frac{1}{2}\log 2\right) = 0{,}15987$; C — Эйлерова постоянная.
55. $\frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449341$. **56.** 0,105166.
57. $S = 1{,}20205690$. **58.** $S = 0{,}9375483$.
59. $S' = \frac{\pi^2}{12}\log 2 - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^2} = 0{,}1013166$.
60. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots = -C(\sqrt{2} - 1) = 0{,}60490$.
61. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = 1{,}37076$. **62.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 0{,}73414$.
63. $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 0{,}746824$.
64. $\int_0^1 x^x\, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots = 0{,}7834305$.
65. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\, dx = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots\right) = 1{,}831931$.
65. 1,22927.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД

УЧЕБНИКИ ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Александров, В. А., инж. — Наглядный электротехнический задачник. 885 задач и вопросов по всем отделам электротехники с предварительными теоретическими сведениями. 2-е издание. Пособие при прохождении электротехники в школе и для самостоятельных упражнений. 193 стр. Ц. 2 р.

Андреев, Н. Н., проф. — Введение в коллоидную химию. 85 стр. Ц. 90 к.

Бавинк, Б., д-р. — Введение в общую химию. С 24 рисунками. 180 стр. Ц. 1 р.

Бернацкий, Л., инж. — Общее понятие о железнодорожном пути и сооружениях. 156 стр. Ц. 1 р. 25 к.

Бирон, Е. В. — Учение о газах и жидкостях. Под редакцией и с дополнительной главой проф. О. Д. Хвольсона. С 23 рисунками и 56 табл. 253 стр. Ц. 2 р. 20 к.

Богомолов, С. А., проф. — Основания геометрии. С 21 чертежами в тексте. 329 стр. Ц. 2 руб.

Бокий, Б. И., проф. — Практический курс горного искусства. Т. I. Основы горного искусства. 390 стр. Ц. 3 р.

Его же. — Практический курс горного искусства. Том II. Горные работы, разведки и бурение. 512 стр. Ц. 4 р. 50 к.

Его же. — Практический курс горного искусства. Том III. Эксплоатация месторождений. 680 стр. с 538 рисунками. Ц. 5 р. 50 к.

Брандт, А. А., проф. — Основания термодинамики Ч. I. Основные законы. Газы. 202+12+15 стр. Ц. 1 р. 50 к.

Его же. — Основания термодинамики. Ч. II. Пары. Жидкости. 295 стр. Ц. 2 р. 50 к.

Брилинг, С. Р. — Курс водоснабжения. 96 стр. Ц. 1 р.

Де-ла-Валле-Пуссен, Шарль-Жан. — Курс анализа бесконечно малых. Том первый. 485 стр. Ц. 4 р.

Гурса, Э. — Курс математического анализа. Том II. Ч. 1. Теория аналитических функций. Под редакцией Б. К. Млодзеевского. С 70 чертежами. 270 стр. Ц. 4 р.

Дешевой, М. А., проф. — Курс начертательной геометрии. С 390 чертежами в тексте. 370 стр. Ц. 3 р.

Джекоби и Девис. — Основания и фундаменты мостов и зданий. Перев. инж. Л. Бернацкого. Пособие для инженеров и студентов. 348 стр. Ц. 2 р. с атласом.

Дмоховский, В. К. — Проектирование и расчет земляных работ. С приложением сокращенных таблиц для разбивки кривых и подсчета земляных работ. 64 стр. Ц. 60 к.

Дубелир, Г. Д. — Дорожное дело. Часть I. Основные понятия. 138 стр. Ц. 2 р. 30 к.

Егоров, Д. Ф., проф. — Элементы теории чисел. 119 стр. Ц. 1 р. 50 к.

Его же. — Основания вариационного исчисления. 77 стр. Ц. 1 р.

Зильберминц, В. А. — Руководство и таблицы для определения минералов при помощи паяльной трубки. 246 стр. Ц. 3 р. 25 к.

Иерусалимский, А. — Современные мотоциклы. 231 стр. Ц. 80 к.

Карейша, С. Д., проф. — Краткий курс железных дорог. Руководство для ознакомления в популярной форме с устройством и эксплоатацией железных дорог. 152 стр. Ц. 2 р. 25 к.

Кирпичев, В. Л. — Основания графической статики. 4-е издание, исправленное и дополненное. 34 стр. с 262 рис. Ц. 3 р.

Его же. — Сопротивление материалов. Часть I. Учение о прочности построек и машин. Посмертное издание, исправленное и дополнен. 400 стр. с 229 рис. Ц. 3 р. 50 к.

Его же. — Сопротивление материалов. Часть II. Учение о прочности построек и машин. Издание четвертое, дополненное. Под редакцией проф. С. Тимошенко 506 стр. Ц. 4 р. 50 к.

Коялович, Б. М., проф. — Аналитическая геометрия. Изд. 2-е, исправленное и дополненное. 198 стр. Ц. 2 р. 50 к.

Его же. — Лекции по высшей математике. Том I. Дифференциальное исчисление с приложениями к анализу. Издание 2-е. 244 стр. Ц. 1 р. 50 коп.

Его же. — Лекции по высшей математике. Том I. Выпуск второй. Начала интегрального исчисления. Изд. 2-е. 185 стр. Ц. 2 р.

Лахтин, Л. К. — Курс теории вероятностей. 275 стр. Ц. 3 р.

Левинсон-Лессинг, Ф. Ю., и Д. С. Белянкин. — Учебник кристаллографии. Часть I. Геометрич. кристаллография. Изд. 2-е, испр. и доп. С 251 фиг. 141 стр. Ц. 2 р.

Лучицкий, В. И. — Курс петрографии. Издание 2-е. дополненное и исправленное. 341 стр. Ц. 2 р. 50 к.

Малышев, В. А., и А. П. Гавриленко. — Технология дерева. Текст. Издание 5-е. 115 стр. С атласом из 15 таблиц. Ц. 1 р. 25 к.

Межеричер, Л. И. — Машиностроительное черчение с подготовительным курсом начального черчения. Для технических учебных заведений и самообразования. С 312 фигурами в тексте. Издание 2-е, переработанное и дополненное. XII+396 стр. Ц. 3 р.

Его же. — Механика. Для технических и других училищ и для самообразования. 222 стр. Ц. 1 р. 75 к.

Меншуткин, Н. А. — Аналитическая химия. Девятое издание, переработанное и дополненное. XVI+439 стр. с 66 рис. Ц. 3 р.

Мещерский, И. В., проф. — Курс теоретической механики. Часть первая. 175 стр. Ц. 2 р. 40 к.

Млодзеевский, А. Б. — Термодинамика и теория фаз. Введение в учение о состоянии вещества с точки зрения термодинамики. 172 стр. Ц. 1 р. 75 к.

Млодзеевский, Б. К. — Основы высшей алгебры. 111 стр. Ц. 1 р. 20 к.

Его же. — Основы аналитической геометрии в пространстве. Издание 4-е. 151 стр. Ц. 2 р. 50 к.

Николаи, Е. Л., проф. — Лекции по теоретической механике. Часть I. Статика твердого тела. 140 стр. Ц. 1 р. 10 к.

Его же. — Лекции по теоретической механике. Часть II. Кинематика. 155 стр. Ц. 1 р. 20 к.

Передерий, Г. П., проф. — Курс мостов. Конструкция проектирование и расчет. Часть 1. Мосты малых пролетов, каменные, деревянные и железные. Издание второе. VIII+644 стр. С 941 рис. Ц. 7 р. 50 к.

Петровский, А. А., проф. — Основы физики. С 256 рис. на отдельных листах. Текст. 234 стр. Ц. 3 р. 75 к.

Его же. — Основы физики. Атлас чертежей. Рис. 256 и таблица. Ц. 50 к.

Попруженко, М. — Начала анализа. Изд. 3-е. 125 стр. Ц. 75 к.

Радциг, А. А. — Таблицы и диаграммы для водяного пара. 96 стр. и 3 таблицы. Ц. 1 р. 40 к.

Его же. — Прикладная механика. 251 стр. Ц. 1 р. 80 к.

Резерфорд, Э. — Строение атома и искусственное разложение элементов. 177 стр. Ц. 1 р. 25 к.

Ривош, О. А. — Железобетонные конструкции и графика для расчета. Часть I. 222 стр. Часть II. 36 таблиц. Ц. за обе части 6 р.

Тимошенко, С. П., проф. — Курс сопротивления материалов. Пятое издание. 524 стр. Ц. 5 р. 50 к.

Тредвель, Ф. — Курс аналитической химии в двух томах. Том I. Качественный анализ. Перевод с немецкого А. Комаровского. 427 стр. Ц. 3 р.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД

Тредвель, Ф. — Курс аналитической химии в двух томах. Том II. Количественный анализ. Перевод с немецкого А. Комаровского. 3-е изд. 572 стр. Ц. 4 р.

Уокер, Д. — Введение в физическую химию. С предисловием акад. Вальдена. Изд. 2-е. 350 стр. Ц. 3 р.

Ушаков, Н., проф. — Канализация населенных мест. I. Общие основания устройства водостоков и составление проекта водосточной сети. 132 стр. с 42 рис. Ц. 1 р. 10 к.

Фадеев, Н., инж. — Строительное искусство. Часть I. 216 стр. Ц. 1 р. 40 к. Часть II. 168 стр. Ц. 1 р. 40 к.

Фаст, А. Б., инж. — Технология бумаги. Краткий курс. 92 стр. Ц. 2 р.

Фатер, Р. — Элементы машин. Перевод с немецкого Дьяконова. С 184 рис. в тексте. 142 стр. Ц. 75 к.

Фаянс, К. — Радиоактивность и современное учение о химических элементах. Перевод и дополнение Э. Шпольского. 121 стр. (Серия „Современные проблемы естествознания".) Ц. 40 к.

Фосс, А., проф. — Сущность математики. Перевод со второго издания. 115 стр. Ц. 75 к.

Холуянов, Ф. И., проф. — Альтернаторы и преобразователи переменно-постоянного тока. Краткое руководство к теоретическому и практическому изучению их работы. 198 стр. с 131 рис. в тексте и 6 таблицами. Ц. 1 р. 50 к.

Холуянов, Ф. И. — Асинхронные двигатели однофазного и трехфазного тока. Краткое руководство к теоретическому и практическому изучению их работы. 167 стр.

Его же. — Трансформаторы однофазного и трехфазного тока. Краткое руководство к теоретическому и практическому изучению их работы. 136 стр. Ц. 1 р. 75 к.

Шарвин, В. В. — Введение в химию. Краткий курс неорганической химии для высших учебных заведений и для самообразования. 4-е изд. 416 стр. Ц. 2 р.

Шимкевич, В. — Биологические основы зоологии. Том II. С 179 рис. Изд. 4-е дополненное. 405—723 стр. Ц. 3 р. 50 к.

Юнкер, Ф. — Повторительный конспект и сборник задач по дифференциальному исчислению. С 46 рис. Перевод В. Степанова. 100 стр. Ц. 80 к.

Яковлев, Н. Н. — Учебник палеонтологии для высшей школы и для самообразования. Изд. 2-е. 447 стр. Ц. 3 р.
